Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLV, вып. 1, 1961 г.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ С. А. ЧАПЛЫГИНА К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ

А. Д. Школьников

При электромоделировании нелинейных систем возникает задача оценки методической погрешности модели, связанной с приближенным выполнением заданных функциональных зависимостей и возмущающих сил. Эта погрешность, называемая динамической погрешностью апроксимации, неизбежна при использовании серийных электромоделирующих устройств и по величине может превышать другие составляющие ошибки.

Важность этой оценки обусловлена необходимостью определения оптимальной структурной схемы модели, т. е. такой схемы, которая при использовании ограниченного числа решающих элементов обеспечивает минимальную погрешность. Применяя эту оценку в качестве критерия, можно путем выбора надлежащего способа апроксимации повысить точность моделирования или в пределах допустимой ошибки упростить схему модели, что облегчает работу со схемой и расширяет возможности малых электромоделирующих устройств (типа МН-7 и т. п.).

С помощью такого рода оценки можно решать и другие задачи: например, определять дополнительное движение системы в случае отличия реальных характеристик звеньев от заданных, оценивать динамическую точность счетно-решающих устройств и т. п.

Пусть задано уравнение движения системы

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)});\quad y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{1}$$

Правая часть уравнения (1) непрерывна вместе с частными производными $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$ в рассматриваемой замкнутой области $\overline{G}$

$$x_0 \leqslant x \leqslant X,\quad a_k \leqslant y^{(k)} \leqslant b_k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Вследствие аппроксимации нелинейных зависимостей при наборе модель воспроизводит уравнение

$$u^{(n)} = \varphi(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(n-1)});\quad u^{(k)}(x_0) = u_0^{(k)}$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{2}$$

В технических задачах часто допускают оценку погрешности $\Delta y = u - y$ по первому приближению. Тогда, используя первые члены разложе-

ния разности $u^{(n)} - y^{(n)}$ в ряд Тейлора, можно написать уравнение первого приближения погрешности

$$v^{(n)} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}} v^{(k)} + [\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - y^{(n)}];$$

$$v_0^{(k)} = u_0^{(k)} - y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{3}$$

где $v \approx \Delta y$.

Однако даже в этом случае непосредственное решение (3) практически невозможно из-за трудностей определения коэффициентов $\frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}}$.

Вместе с тем оценку Δy легко произвести с помощью известной теоремы о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина [1]. Эта теорема и ее дальнейшие обобщения [2] позволяют достаточно просто ограничить сверху и снизу искомое решение двумя функциями сравнения. Условия построения функций сравнения несложны. Так, например, для того, чтобы непрерывная n раз дифференцируемая на $[x_0, X]$ функция $z(x)$ являлась функцией сравнения сверху к уравнению (1), достаточно выполнения неравенства

$$z^{(n)} \geqslant f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}), \quad x_0 \leqslant x \leqslant X,$$

$$z_0^{(k)} \geqslant y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Машинная оценка погрешности апроксимации с помощью теоремы С. А. Чаплыгина может производиться двумя методами.

1. Построением функций сравнения сверху и снизу к заданному уравнению (1) таким образом, чтобы они являлись также функциями сравнения и для приближенного решения уравнения (2). Тогда разность между функциями сравнения может служить оценкой определяемой погрешности.

2. Построением функций сравнения к уравнению погрешности.

Первый метод проще и требует меньшего количества аппаратуры, однако второй позволяет получать машинную оценку одновременно с приближенным решением.

При $a_k \leqslant u^{(k)} \leqslant b_k$ погрешность $\Delta y = u - y$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta y^{(n)} = \sum_k \Theta_k(x) \Delta y^{(k)} + \psi, \quad \Delta y_0^{(k)} = u_0^{(k)} - y_0^{(k)}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5}$$

где $\psi = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{n-1}) - y^{(n)}$;

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}}\right|_{\min} \leqslant \Theta_k(x) \leqslant \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}}\right|_{\max}.$$

Функция сравнения сверху к уравнению (5) $s(x)$ должна удовлетворять неравенству (4), т. е.

$$s^{(n)} - \sum_k \Theta_k(x) s^{(k)} - \psi \geqslant 0. \tag{6}$$

Такую функцию можно получить с помощью несложной схемы, решающей уравнение

$$s^{(n)} = \sum_k p_k s^{(k)} + \Phi, \quad s_0^{(k)} = \Delta y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{7}$$

$$\text{где } p_k(s^k) = \begin{cases} p_{k_1} \geqslant \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}} & \text{при } s^{(k)} > 0; \\ p_{k_2} \leqslant \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^{(k)}} & \text{при } s^{(k)} < 0; \end{cases}$$

$$0 \leqslant \Phi \geqslant \psi.$$

Переход от одного постоянного значения p_{k_1} к другому p_{k_2} можно осуществить с помощью различных технических элементов, обладающих релейными характеристиками. Однако наиболее простые решающие схемы получаются при использовании для этой цели диодных элементов, изменяющих величину сопротивления на входе или в цепи обратной связи решающего усилителя, а следовательно, и коэффициент усиления в зависимости от знака $s^{(k)}(x)$ (см. рисунок). При этом вследствие непрерывности характеристик диодов в зоне перехода от одного значе-

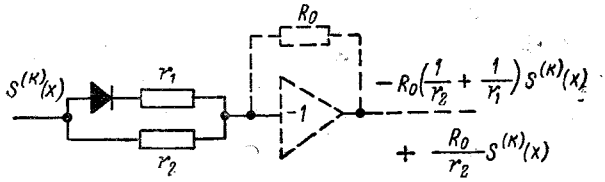


Схема для изменения коэффициента p_k

ния p_k к другому неравенство (6) может нарушаться. Однако нетрудно показать, что ввиду малости зоны перехода, отличие решения уравнения (7) от требуемой функции сравнения может быть достаточно малым.

Такая схема по простоте конструкции приближается к схемам для решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Вследствие ограниченности интервала применимости теоремы С. А. Чаплыгина полученные оценки в общем случае справедливы не на всем интервале задания функций сравнения. Это обстоятельство приводит к необходимости определения границ применимости, что связано с дополнительными вычислениями [2, 3].

Учитывая, что в технических задачах допускается оценка разности между близкими функциями по первому приближению, приведем следующую несложную теорему, позволяющую для некоторых нелинейных уравнений определять границы применимости непосредственно по виду функции сравнения.

Т е о р е м а. Пусть $z(x)$ — функция сравнения сверху (снизу) к уравнению (1) относительно области $\overline{G}$ — удовлетворяет уравнению

$$z^{(n)} = \psi(z, z', \ldots, z^{(n-1)}), \quad z^{(p)} = 0$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n-1), z_0 \neq 0 \ldots \tag{8}$$
$$z_0^{(k)} = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Правая часть уравнения (8) непрерывна в $\overline{G}$ вместе с частными производными первого порядка и

$$y^{(n)} \leqslant \psi(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \; (y^{(n)} \geqslant \psi(y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$x_0 \leqslant x \leqslant X.$$

Тогда определенный по первому приближению интервал, на котором $z^{(m)} \geqslant y^{(m)}$ ($z^{(m)} \leqslant y^{(m)}$), содержит ближайшую на (x_0, X) экстремальную точку $z^m(x)$.

Доказательство этой теоремы основывается на работах Н. В. Азбелева [2, 3]. Уравнение первого приближения v разности $z - y$ имеет вид

$$v^{(n)} = \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial z^{(k)}} v^{(k)} + [\psi(y, y', \ldots, y^{(n-1)} - y^{(n)})],$$

$$v_0^{(k)} = z_0^{(k)} - y_0^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Рассмотрим промежуток применимости m-го порядка [2, 3] функции сравнения $\eta(x)$ к уравнению (9) относительно нулевых начальных разностей $\alpha_k = \eta_0^{(k)} - v_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ (в промежутке применимости m-го порядка выполняется неравенство $\eta^{(m)} > v^{(m)}$ ($\eta^{(m)} < v^{(m)}$). Этот промежуток содержит в себе промежуток применимости того же порядка (x_0, x_m) относительно любых других начальных разностей β_k [2, стр. 173; 3, стр. 590]. В этом случае точка x_m совпадает с первым на (x_0, X) нулем m-ой производной решения уравнения [2, стр. 170].

$$w^{(n)} = \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial z^{(k)}} w^{(k)},$$

$$w_0^{(k)} = \beta_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{10}$$

Уравнение типа (10) может быть получено дифференцированием уравнения (8) как сложной функции. Тогда $z^{(k+1)}(x) = w^{(k)}(x)$ и в точке x_m' первого на (x_0, X) экстремума $z^{(m)}(x)$ функция $w^{(m)}(x)$, полученная решением (10) с начальными условиями

$$w_0^{(n-1)} = \psi(z_0, 0, \ldots, 0), \quad w_0^{(k)} = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

имеет первый на (x_0, X) нуль. Следовательно, на (x_0, x'_m)

$$\eta^{(m)} > v^{(m)} \quad (\eta^{(m)} < v^{(m)}).$$

В качестве функции сравнения к уравнению (9) с нулевыми начальными разностями можно взять $\eta(x) \equiv 0$. Тогда вследствие непрерывности $v^{(m)}(x)$ на основании первой теоремы Коши [4, стр. 199] получим, что на (x_0, x'_m)

$$v^{(m)} \geqslant 0 \quad (v^{(m)} \leqslant 0).$$

Уравнениями типа (8) описываются пуск, реверс и остановка широкого класса электромеханических систем (например, систем привода экскаваторов и т. п.).

Применение этой теоремы ограничено случаями, когда разность $\Delta y = z - y$ можно оценивать по первому приближению. При этом следует иметь в виду, что малость разности между функциями сравнения сверху и снизу $z_1 - z_2$ (а следовательно, и $z - y$) может служить критерием для выбора метода построения функций сравнения с тем, чтобы производимая оценка не была слишком грубой.

Следствие. Пусть $u(x)$ — приближенное решение (1) — удовлетворяет уравнению

$$u^{(n)} = \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}), \ u_0^{(p)} = 0 \ (p = 1, 2, \ldots, n-1), \ u_0 \neq 0 \ldots \tag{11}$$

$$v_0^{(n)} = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Правая часть уравнения (11) непрерывна в $\overline{G}$ вместе с частными производными первого порядка.

Пусть также $s(x)$ — функция сравнения сверху (снизу) к уравнению первого приближения v погрешности

$$\Delta y = u - y, \quad s_0^{(k)} = v_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда интервал, на котором $s^{(m)} \geqslant v^{(m)}$ ($s^{(m)} \leqslant v^{(m)}$) содержит ближайшую на (x_0, X) экстремальную точку $u^{(m)}(x)$.

Нетрудно также показать, что в более общем случае оценку границ применимости можно произвести с помощью несложной решающей схемы, аналогичной рассмотренной выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Соч. Т. I. ГТИ, 1948.
2. Азбелев Н. В. О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Матем. сб. АН СССР, 1956, т. 39, № 2.
3. Азбелев Н. В. О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 1953, т. 89, № 4.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I ГИТТЛ, 1951.