*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVI, вып. 2, 1963 г.*

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ ЗАЛЕГАНИЯ ИСТОЧНИКОВ АНОМАЛИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*И. Г. Клушин, И. Н. Толстихин*

Одной из задач, часто решаемых по данным аэромагнитной съемки, является определение глубины залегания намагниченных пород. Опыт использования аномалий $\Delta T$ в различных геологических регионах показывает, что результаты вычислений становятся вполне надежными лишь после статистического обобщения [1, 10, 11]. В простейшем случае значения глубины залегания возмущающих масс осредняются по некоторой площади, например, в пределах единой аномальной зоны, либо по части маршрута.

Глубина вычисляется обычно по отдельным изолированным аномалиям. Зачастую требуется специальная обработка аномалий $\Delta T$ (переход к градиентам различного порядка и др.), чтобы обеспечить условие изолированности [6]. Решение задачи для группы тел представляет трудности даже для современных электронных цифровых машин.

Для этой цели можно использовать вычислительные машины иного типа — корреляторы, предназначенные для статистического анализа случайных функций. Подобные устройства широко применяются при решении задач гидроаэродинамики, при конструировании антенн, самолетов, кораблей, систем автоматического регулирования (автопилотов, автоматических устройств для контроля и воздействия на химические процессы [1]) и т. п.

Значительное повышение эффективности многих систем оказалось возможным только после отказа от идеализированных моделей — «единичных ступенчатых сигналов» и «синусоидальных воздействий», которые были заменены корреляционными функциями реально наблюдаемых полей [5, 9]. Разумеется, это потребовало значительного увеличения полевых и летных экспериментов в разнообразных условиях. Так, при проектировании автопилотов используют данные о «спектре турбулентности» атмосферы, который находится по измеренной автокорреляционной функции скорости движения воздуха, в то время как классические методы подобного расчета основаны на дифференциальном уравнении, описывающем действие системы, и операционном исчислении [8].

В вычислении глубин намагниченных тел по магнитным аномалиям господствуют классические методы. Действительно, чем иным, как не «единичным сигналом», являются модели тонкого пласта, контакта и другие модели, на которых основаны методы вычислений? Лишь в последние годы по инициативе практиков стали создаваться

[1] Такие приборы используются в Бюро кораблестроения Военно-морского флота США [15], Вашингтонской лаборатории морских исследований [2, 17].

атласы практически наблюдаемых аномалий, соответствующих типичным геологическим формам [1].

При решении задач разведочной геофизики корреляционные методы используются сравнительно широко, однако лишь в чисто качественной форме. В современных условиях при наличии соответствующей вычислительной базы корреляционные методы могут быть использованы и для количественного решения некоторых задач. Одной из них является определение средней глубины залегания магнитных пород в пределах некоторой, сравнительно большой части профиля.

Рассмотрим особенности аномального поля $\Delta T$ для разреза, приведенного на рис. 1. Серия пластов, интрузий и других геологических тел с общим эрозионным срезом, образующих случайную последовательность, перекрыта немагнитными осадочными породами мощностью $z$ *км*. Интенсивность и направление индуцированной и остаточной намагниченности, а также углы падения боковых граней произвольно меняются от одного тела к другому. Так же меняется горизонтальная мощность тел, обеспечивая, однако, достаточную расчлененность кривой $\Delta T$. Простирание тел на глубину в первом приближении считаем бесконечным.

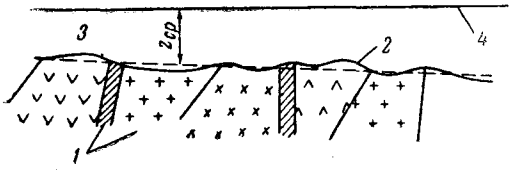



Рис. 1. Схематический геологический разрез района:

*1* — магнитные породы складчатого основания; *2* — эрозионный срез фундамента; *3* — толща немагнитных осадочных пород; *4* — поверхность наблюдения

Для исключения постоянной составляющей поля перейдем от $\Delta T$ к $\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x}$, при этом аномалия над каждым телом заменится парой аномалий (положительной и отрицательной), ограничивающих равные площади.

Элементарная аномалия горизонтального градиента над одной гранью некоторого возмущающего тела подобна аномалии $\Delta T$ над тонким косонамагниченным пластом. Обозначим такую аномалию

$$U_k(x) = \frac{A_k z}{z^2 + (x - x_k)^2} + \frac{B_k (x - x_k)}{z^2 + (x - x_k)^2}, \qquad (1)$$

где $A_k$, $B_k$, — некоторые параметры;

$x$ — горизонтальная координата;

$x_k$ — горизонтальная координата $k$-й угловой точки;

$z$ — вертикальная координата.

Рассмотрим спектр $S_k(\alpha)$ элементарной аномалии $U_k(x)$ [12]:

$$S_k(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} U_k(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} \left[ \frac{A_k z}{z^2 + (x - x_k)^2} + \frac{B_k (x - x_k)}{z^2 + (x - x_k)^2} \right] dx. \qquad (2)$$

Заменив $x - x_k = t$ и $dx = dt$, получим

$$S_k(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} e^{-i\alpha x_k} \left[ \frac{A_k z}{z^2 + t^2} + \frac{B_k t}{z^2 + t^2} \right] dt =$$

$$= e^{-i\alpha x_k} \left[ A_k \pi e^{-\alpha z} - i B_k \pi e^{-\alpha z} \right] = \pi e^{-\alpha z} (A_k - i B_k)\, e^{-i\alpha x_k}. \qquad (3)$$

[1] В качестве примера можно указать на альбом магнитных аномалий Горной Шории и Кузнецкого Ала-Тау, созданный В. Г. Кузнецовой.

Полный спектр, т. е. спектр всей совокупности аномалий, число которых равно $2N+1$, выразится равенством

$$S(\alpha) = \sum_{k=-N}^{N} S_k(\alpha) = \pi e^{-\alpha z} \sum_{k=-N}^{N} (A_k - iB_k)\, e^{-i\alpha x_k}. \qquad (4)$$

Комплексно сопряженная с $S_k(\alpha)$ величина

$$S_k^*(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \left[ \frac{A_k z}{z^2 + (x - x_k)^2} + \frac{B_k (x - x_k)}{z^2 + (x - x_k)^2} \right] dx =$$

$$= \pi e^{-\alpha z} (A_k + iB_k)\, e^{i\alpha x_k}. \qquad (5)$$

Отсюда полная величина

$$S^*(\alpha) = \sum_{k=-N}^{N} S_k^*(\alpha) = \pi e^{-\alpha z} \sum_{k=-N}^{N} (A_k + iB_k)\, e^{i\alpha x_k}. \qquad (6)$$

Вычислим произведение функций:

$$S(\alpha)\, S^*(\alpha) = \pi^2 e^{-2\alpha z} \left[ \sum_{k=-N}^{N} (A_k - iB_k)\, e^{-i\alpha x_k} \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=-N}^{N} (A_k + iB_k)\, e^{i\alpha x_k} \right].$$

Заменим для удобства индекс суммирования, введя $m$ вместо $k$ в последнюю квадратную скобку. Произведение $S(\alpha)S^*(\alpha)$ перепишем в виде

$$S(\alpha)\, S^*(\alpha) = \pi^2 e^{-2\alpha z} \left[ \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{-i\alpha x_k} \sum_{m=-N}^{N} A_m e^{i\alpha x_m} - \right.$$

$$- i \sum_{k=-N}^{N} B_k e^{-i\alpha x_k} \sum_{m=-N}^{N} A_m e^{i\alpha x_m} + i \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{-i\alpha x_k} \sum_{m=-N}^{N} B_m e^{i\alpha x_m} +$$

$$\left. + \sum_{k=-N}^{N} B_k e^{-i\alpha x_k} \sum_{m=-N}^{N} B_m e^{i\alpha x_m} \right] =$$

$$= \pi^2 e^{-2\alpha z} \left[ \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} A_k A_m e^{i\alpha (x_m - x_k)} + \sum_{k=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} B_k B_m e^{i\alpha (x_m - x_k)} \right]. \qquad (7)$$

Правую и левую части равенства (7) поделим на $2N+1$, т. е. на число слагаемых членов. Одновременно выделим из двойных сумм члены, удовлетворяющие условию $k=m$,

$$\frac{S(\alpha)\, S^*(\alpha)}{2N+1} = \frac{\pi^2 e^{-2\alpha z}}{2N+1} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=-N}^{N} (A_k^2 + B_k^2) + \sum_{k=-N}^{N} \sum_{\substack{m=-N \\ k \neq m}}^{N} (A_k A_m + B_k B_m)\, e^{i\alpha (x_m - x_k)} \right]. \qquad (8)$$

Двойная сумма в правой части (8) включает пары членов вида

$$(A_p A_q + B_p B_q)\, e^{i\alpha (x_q - x_p)}$$

и (9)

$$(A_q A_p + B_q B_p)\, e^{i\alpha (x_p - x_q)}.$$

Учитывая, что

$$A_pA_q = A_qA_p, \quad B_pB_q = B_qB_p$$

и

$$e^{i\alpha(x_q-x_p)} + e^{i\alpha(x_p+x_q)} = 2\cos\alpha(x_p - x_q),$$

получаем

$$\sum_{k=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N}(A_kA_m + B_kB_m)\,e^{i\alpha(x_m-x_k)} =$$

$$= 2\sum_{m=-(N-1)}^{N}(A_{-N}A_m + B_{-N}B_m)\cos\alpha(x_m - x_{-N}) +$$

$$+ 2\sum_{m=-(N-2)}^{N}(A_{-(N-1)}A_m + B_{-(N-1)}B_m)\cos\alpha(x_m - x_{-(N-1)}) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{N}(A_0A_m + B_0B_m)\cos\alpha(x_m - x_0) +$$

$$+ 2\sum_{m=2}^{N}(A_1A_m + B_1B_m)\cos\alpha(x_m - x_1) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ 2(A_{N-1}A_N + B_{N-1}B_N)\cos\alpha(x_N - x_{N-1}) =$$

$$= 2\sum_{k=-N}^{N-1}\sum_{m=k+1}^{N}(A_kA_m + B_kB_m)\cos\alpha(x_m - x_k). \qquad (10)$$

Таким образом,

$$\frac{S(\alpha)\,S^*(\alpha)}{2N+1} = \pi^2 e^{-2\alpha z}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(A_k^2 + B_k^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N-1}\sum_{m=k+1}^{N}(A_kA_m + B_kB_m)\cos\alpha(x_m - x_k)\right]. \qquad (11)$$

Для статистически однородной последовательности аномалий должен существовать предел

$$\widetilde{S(\alpha)}\,\widetilde{S^*(\alpha)} \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{S(\alpha)\,S^*(\alpha)}{2N+1} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\pi^2 e^{-2\alpha z}\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(A_k^2 + B_k^2) + \frac{2}{2N+1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=-N}^{N-1}\sum_{m=k+1}^{N}(A_kA_m + B_kB_m)\cos\alpha(x_m - x_k)\right] = \pi^2 e^{-2\alpha z}(\overline{A}^2 + \overline{B}^2), \qquad (12)$$

где

$$(\overline{A}^2 + \overline{B}^2) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(A_k^2 + {}^2_kB). \qquad (13)$$

Действительно, выражение

$$\frac{2}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N-1}\sum_{m=k+1}^{N}(A_kA_m + B_kB_m)\cos\alpha(x_m - x_k).$$

стремится к нулю при $N \to \infty$, так как оно представляет собой среднее значение суммы положительных и отрицательных членов, ограниченных по величине [1]. Сходимость в среднем к нулю усиливается, вообще говоря, наличием равенств

$$A_{p+1} = -A_p; \quad B_{p+1} = -B_p. \tag{14}$$

Коэффициенты $A_k$ и $B_k$ могут принимать положительные и отрицательные значения, так как при дифференцировании по $x$ аномалии магнитного поля $\Delta T$ эффект каждого геологического тела типа пласта заменяется суммой эффектов двух тонких пластов с равной по величине, но противоположной по знаку магнитной массой. Сумма положительных и отрицательных значений при любом конечном числе возмущающих поле геологических тел в точности равна нулю. Вместе с тем интервалы $x_m - x_k$ образуют случайную последовательность. Среднее значение косинуса случайного аргумента также стремится к нулю.

Формально приведенное выше можно истолковывать как определение энергии суммы некогерентных колебаний, т. е. колебаний одинаковой частоты, фазы которых разбросаны беспорядочно. Как известно (например [7]), энергия суммы таких колебаний равна сумме энергий отдельных составляющих.

Итак, уравнение (12) принимает вид

$$\widetilde{S}(\alpha)\widetilde{S}^*(\alpha) = \pi^2 e^{-2\alpha z}(\overline{A}^2 + \overline{B}^2).$$

По определению [12] среднее значение произведения $S(\alpha)S^*(\alpha)$ характеризует энергетический спектр $G(\alpha)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} S(\alpha) S^*(\alpha) = \pi G(\alpha), \tag{15}$$

$$\pi G(\alpha) = \pi^2 e^{-2\alpha z}(\overline{A}^2 + \overline{B}^2).$$

Сходное выражение получено В. Н. Калашниковым для последовательности гравитационных аномалий [3].

Очевидно,

$$G(0) = \pi(\overline{A}^2 + \overline{B}^2), \tag{16}$$

$$\int_0^\infty G(\alpha)\, d\alpha = \frac{\pi(\overline{A}^2 + \overline{B}^2)}{2z}. \tag{17}$$

Отсюда находим выражение искомой глубины до источников поля через энергетический спектр поля

$$z = \frac{G(0)}{2\int_0^\infty G(\alpha)\, d\alpha}. \tag{18}$$

Энергетический спектр можно вычислять через автокорреляционную функцию [9]. Автокорреляционная функция $R(\tau)$ характеризует взаимную связь значений одной и той же случайной функции $U(x)$ в совокупности точек профиля

$$R(\tau) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [U(x) - \overline{U}]\,[U(x+\tau) - \overline{U}]\, dx, \tag{19}$$

где $\overline{U}$ — среднее значение функции $U(x)$ на интервале $L$;

$\tau$ — заданное смещение.

[1] Практически $N$ должно быть не менее 10, т. е. статистический ансамбль должен включать не менее десяти геологических тел. В этом случае указанный член становится пренебрежимо малым.

Предполагается, что интервал $L$ достаточно велик: во много раз больше отрезка, в пределах которого можно ожидать существенное изменение функции $U(x)$.

В нашем случае $U(x)$ — кривая $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\bar{U} = 0$, поэтому

$$R(\tau) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial T(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x+\tau)}{\partial x} dx. \quad (20$$

Согласно теореме Хинчина [13] энергетический спектр является косинус-трансформаторной автокорреляционной функции $R(\tau)$ [12]:

$$G(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\tau) \cos \alpha\tau d\tau, \quad (21$$

$$R(\tau) = \int_0^\infty G(\alpha) \cos \alpha\tau d\alpha. \quad (22$$

На основании формул (21) и (22) равенство (18), определяющее искомую глубину, принимает вид

$$z = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^\infty R(\tau)\, d\tau}{2R(0)}.$$

Учитывая, что отношение $\frac{R(\tau)}{R(0)}$ дает нормированную функцию автокорреляции $R_0(\tau)$, получаем окончательно

$$z = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_0(\tau)\, d\tau. \quad (23$$

Итак, глубина залегания тел, создающих аномалии, определяется интегралом от нормированной автокорреляционной функции, которая статистически характеризует изменчивость аномалий, независимо от их интенсивности (рис. 2). Это очень общая формула. Действительно, форма отдельных аномалий еще не определяет глубины до источников, так как аномалиям разной формы может соответствовать одна и та же глубина. Точно также интенсивность аномалий не должна влиять на расчеты глубины, поскольку эта интенсивность в первую очередь зависит от размеров тел и их намагниченности. Именно изменчивость аномалий в плане или по профилю наиболее сильно сказывается на определении глубины. Конкретные реализации общего статистического распределения аномалий будут характеризоваться одинаковой нормированной автокорреляционной функцией. Однако различие может быть настолько большим, что даже автокор-

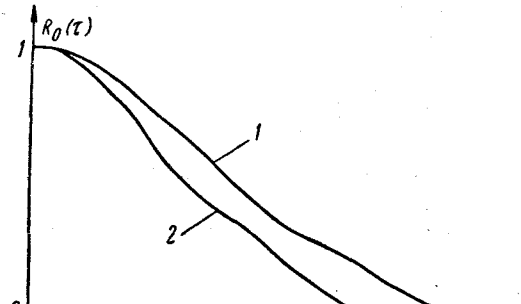



Рис. 2. График функции $R_0(\tau)$.
Кривая *1* соответствует бо́льшей глубине залегания источников аномалий, чем кривая *2*

реляционные функции могут отличаться. Достаточно сохранить неизменным интеграл от автокорреляционной функции и получится та же глубина.

На расстояниях одного порядка с величиной интервала $L$ статистические свойства распределения аномалий могут существенно изменяться. Это обусловит закономерное изменение вычисленной глубины. Таким образом, результаты статистической обработки аэромагнитных данных позволят в обобщенной форме описывать рельеф поверхности, образуемой верхними кромками намагниченных тел.

Главное отличие предлагаемой методики расчетов от обычно принятой заключается в том, что рассматриваются не отдельные изолированные аномалии, а совокупность аномалий, образующих множество, статистические свойства которого остаются неизменными в однородных геологических условиях. При значительной степени стати-

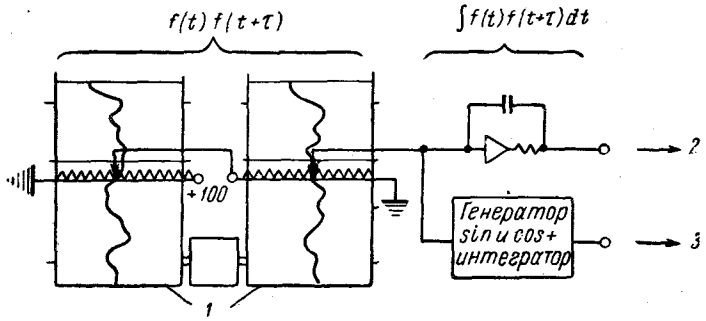



Рис. 3. Блок-схема автокоррелятора [8]:
*1* — устройство для чтения кривых; *2* — автокорреляционная функция; *3* — спектр

стического обобщения результаты вычислений позволят характеризовать лишь структурные формы, коррелирующиеся на большом расстоянии — может не крупные по амплитуде, но большие по площади. Такие структуры наиболее характерны для платформенных областей.

Для определения и учета влияния нижних кромок намагниченных тел можно воспользоваться ранее предложенным приемом [4]. Не исключена вероятность, что для крупных регионов в дальнейшем удастся определить поправочный коэффициент к формуле (23), поскольку могут быть общие для крупных областей отклонения от модели, принятой при расчетах. Однако такие поправочные коэффициенты не должны существенно отличаться от единицы.

Практическое вычисление величин, входящих в правые части равенств (18) и (23), осуществляется с помощью корреляторов. Многие типы этих приборов позволяют вычислять одновременно и автокорреляционную функцию, и энергетический спектр. Блок-схема одного из таких приборов, разработанного во Франции [8], показана на рис. 3. Коррелятор представляет собой прибор, состоящий из 6—8 блоков весом от 5 до 20 *кг* каждый. Такой прибор может быть установлен на базе полевой экспедиции.

Время вычисления автокорреляционной функции пропорционально числу точек на графике $R(\tau)$ и длительности анализируемой записи. Практически оно может составлять несколько десятков минут. Так, коррелятор Техасского университета на вычисление нормированной функции автокорреляции при 60 значениях $\tau$ с погрешностью 2% затрачивает около 20 *мин* [16]. Обработка кривой $\Delta z$ при одном пласте на электронной цифровой машине «Урал» занимает 10 *мин* [14].

Методы, основанные на количественном изучении корреляц ных связей, несомненно будут все шире применяться при интерпр ции геофизических данных. Эти методы наиболее отвечают сущно разведочной геофизики — науки, которая, не допуская значитель абстракции, устанавливает основные закономерности на основе бо шой совокупности конкретных фактов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Андреев Б. А. Геофизические методы в региональной структурной геоло Госгеолтехиздат, 1960.
2. Васманов В. В. Вычислительные математические приборы. Машгиз, 1
3. Калашников В. Н. Применение теории случайных функций при реше некоторых задач гравиразведки. Тр. МИНХиГП, вып. 25, 1959.
4. Клушин И. Г. Об оценке глубины залегания кристаллического фундам по расчетам магнитных и гравитационных аномалий. Сб. «Прикладная геофизи вып. 27, 1960.
5. Лэнинг Д., Бэттин Р. Случайные процессы в задачах автоматическ управления. Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Логачев А. А. Использование высших производных магнитного потенци в магниторазведке. Зап. ЛГИ, т. XXXIX, вып. 2, 1961.
7. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Изд-во АН СССР, 1955.
8. Пелегрэн М. Статистический расчет следящих систем. Изд-во иностр. л 1957.
9. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к зада автоматического управления. Физматгиз, 1960.
10. Симоненко Т. Н. Использование результатов аэромагнитной съемки выяснения рельефа поверхности фундамента Западно-Сибирской низменности. Инфо сб. ВСЕГЕИ, № 3, 1956.
11. Фотиади Э. Э. Геологическое строение Русской платформы по данн региональных геофизических исследований и опорного бурения. Тр. ВНИИГеофиз вып. IV, 1958.
12. Харкевич А. А. Спектры и анализ. ГИТТЛ, 1957.
13. Хинчин А. Я. Теория стационарных стохастических процессов. Сб. «Усп математических наук», вып. V, 1938.
14. Применение теории функций комплексного переменного для геологичес интерпретации магнитных наблюдений. Сб. «Состояние и перспективы развития р ведочной геофизики», Гостоптехиздат, 1961.
15. Anderson V. C., Rundick K. P. Rev. Scient. Instrum., 1953, v. 24, №
16. Brook F. E. Rev. Scient. Instrum., 1952, v. 23, № 3.
17. Hastings A. E., Meade I. E., Rev. Scient. Instrum., 1952, v. 23, № 7