*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVII, вып. 1, 1962 г.*

# МАШИННАЯ ОЦЕНКА ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ С. А. ЧАПЛЫГИНА

*А. Д. Школьников*

Теорема о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина [1] и ее дальнейшие обобщения [2] дают возможность оценки неизвестного решения дифференциального уравнения двумя функциями сравнения сверху и снизу. Этот метод весьма эффективен для приближенного определения траектории движения электромеханических систем или для оценки дополнительного движения, вызванного отклонением фактических значений параметров системы от расчетных. Однако широкому распространению методов, основанных на теореме С. А. Чаплыгина, препятствуют трудности определения ее границ применимости.

В технических задачах обычно допускается оценка погрешности по первому приближению. В этом случае при функциях сравнения $z(x)$, проходящих через ту же начальную точку, что и искомое решение $y(x)$, задача определения промежутка применимости (т. е. интервала знакопостоянства разности $z^{(i)} - y^{(i)}$), сводится к оценке интервала положительности $i$-й производной решения линейного уравнения

$$L[v] = v^{(n)} - \sum_k p_k(x)\, v^{(k)} = \varphi(x), \quad x \in [a, b];$$

$$v^{(k)}(a) = 0 \,(k = 0, 1, \ldots n-1), \quad \varphi(x) \geqslant 0 \ldots, \tag{1}$$

где $i$ — любое из чисел $(0, 1, \ldots n-1)$.

Оценку интервала положительности $v^{(i)}(x)$ можно произвести с помощью $n$-раз непрерывно дифференцируемой по $x$ функции $w(x, t)$, удовлетворяющей следующим условиям [2]:

а) значение функции $w(x, t)$ и ее производных на прямой $x = t$

$$w_x^{(k)}(t, t) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots n-2), \quad w_x^{(n-1)}(t, t) = 1;$$

б) оператор, полученный подстановкой $w(x, t)$ в $L[v]$, в некотором треугольнике $a \leqslant t \leqslant x \leqslant c$ неположителен, т. е.

$$L[w(x, t)] \leqslant 0. \tag{2}$$

Тогда, если в этом треугольнике $w_x^{(i)}(x, t) \geqslant 0$, то на $[a, c]$ $v^{(i)}(x) \geqslant 0$.

Однако практическое применение этого метода затрудняется отсутствием достаточно простого алгоритма построения функций $w(x, t)$ В то же время на основании известных результатов [2] можно показать, что существует весьма простой метод машинной оценки интервала положительности $v_{(i)}(x)$.

Рассмотрим функцию $u(x,t)$ — решение уравнения

$$u_x^{(n)}(x,\ t)=\sum_k q_k u_x^{(k)}(x,\ t),$$

$$q_k(u_x^{(k)})=\begin{cases} q_k\leqslant p_k(x),\ u_x^{(k)}>0 \\ q_k\geqslant p_k(x),\ u_x^{(k)}<0 \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u_x^{(k)}(t,\ t)=0\quad (k=0,\ 1,.\quad\ n-2),\quad u_x^{(n-1)}(t,\ t)=1. \tag{4}$$

Решение этого уравнения может быть найдено методом припасовывания (например [3, стр. 391—398]). По этому методу уравнение (3) решается по этапам, причем начальные условия для уравнения на последующем этапе определяются из конечных значений функций $u_x^{(k)}$ на предыдущем этапе и условий скачков.

Пусть в точке $x_i\in(t_0,\ b)$ функция $u_x^{(i)}$ превращается в нуль и происходит скачкообразное изменение коэффициента $q_i$ на конечную величину $\Delta q_i=q_{i2}-q_{i1}$. Этот скачок влияет на изменение $u_x^{(n)}$ в точке $x_i$, остальные функции $u_x^{(k)}(k=0,\ 1,\quad n-1)$ в точке $x_i$ остаются непрерывными. Так как

$$u_x^{(i)}(x_i-0,\ t_0)=u_x^{(i)}(x_i,\ t_0)=u_x^{(i)}(x_i+0,\ t_0),$$

$$u_x^{(i)}(x_i,\ t_0)=0,$$

то

$$q_i(x_i-0)\,u_x^{(i)}(x_i-0,\ t_0)=q_i(x_i+0)\,u_x^{(i)}(x_i+0,\ t_0)=0. \tag{5}$$

Дополним определение функции $q_i u_x^{(i)}$, положив ее значение в точке $x_i$ равным пределу, например, справа [4, стр. 176, 181]. Тогда, учитывая непрерывность остальных слагаемых в правой части уравнения (3), получим, что $u_x^{(n)}(x,\ t_0)$ непрерывна в точке $x_i$. Переходя от $x_i$ к $x_{i+1}$ и рассматривая решение (3) при различных $t$, получим, что $u(x,\ t)$ непрерывно $n$-раз дифференцируема по $x$ в треугольнике $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$. Подставляя $u(x,\ t)$ в $L[v]$, получим

$$L[u(x,\ t)]=u_x^{(n)}(x,\ t)-\sum_k p_k(x)\,u_x^{(k)}(x,\ t)=$$

$$=\sum_k[q_k-p_k(x)]\ u_x^{(k)}(x,\ t). \tag{6}$$

При определенных, согласно (3), значениях коэффициентов $q_k$

$$q_k-p_k(x)\leqslant 0\ \text{при}\ u_x^{(k)}(x,\ t)>0, \tag{7}$$

$$q_k-p_k(x)\geqslant 0\ \text{при}\ u_x^{(k)}(x,\ t)<0.$$

Поэтому $L[u(x,t)]\leqslant 0$. Таким образом, функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2) и может применяться для оценки интервала положительности $v^{(i)}(x)$.

При изменении параметра $t$ на постоянную величину $\tau$ решение (3) и его производные сдвигаются по оси $X$ на ту же величину $\tau$. Поэтому для определения минимального интервала положительности $u_x^{(i)}(x,t)$ в треугольнике $a\leqslant t\leqslant x\leqslant b$ достаточно определить интервал положительности $u_x^{(i)}(x,a)$ $i$-й производной решения (3) при $t=a$. Таким обра-

зом, оценку интервала положительности $v^{(i)}(x)$ можно произвести путем решения вспомогательного уравнения

$$u^{(n)} = \sum_k q_k u^{(k)}, \quad q_k(u^{(k)}) = \begin{cases} q_k \leqslant p_k(x), & u^{(k)} > 0 \\ q_k \geqslant p_k(x), & u^{(k)} < 0 \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$u^{(k)}(a) = 0 \ (k = 0, \ 1, \ldots \ n-2), \quad u^{(n-1)}(a) = 1. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) легко выполняется машинным путем с помощью несложных схем, аналогичных рассмотренным в [5]. В этих схемах переключение коэффициентов $q_k$ производится в зависимости от знака $u^{(k)}(x)$ в тот момент, когда $u^{(k)}(x) = 0$. Для этого можно использовать диодные переключатели, изменяющие сопротивление на входе или в цепи обратной связи решающего усилителя и, таким образом, изменяющие его коэффициент усиления. Конструкция схем с диодными элементами весьма проста, легко осуществима и дает достаточно точные для практических целей решения.

В качестве примера рассмотрим движение электромеханической системы, разгон которой осуществляется с ограничением ускорения. Пусть уравнение движения системы

$$y'' = \frac{1}{T}[1 \quad y - f(y')] - \frac{1+T}{T} y' \quad y_0' = y_0 = 0, \tag{10}$$

где $f(y')$ — нелинейная характеристика ограничивающей связи;
$T$ — параметр системы;
$y(x)$ — относительная скорость движения системы.

Пусть далее $z(x)$, $z_0' = z_0 = 0$ — приближенное решение (10). Произведем оценку погрешности $z-y$ по первому приближению, т. е. положим $z - y \approx t$, где $t = t(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$t'' = p_1(x)\, t' - \frac{1}{T} t + \psi(x), \quad t_0' = t_0 = 0, \tag{11}$$

где

$$p_1(x) = -\frac{1+T}{T} - \frac{1}{T} \frac{df(y')}{dy'}$$

Уравнение (11) получено подстановкой в (10) $y = z - t$ и учетом только первых двух членов разложения правой части (10) в ряд Тейлора по степеням $t$.

Оценку погрешности $t(x)$, например сверху, несложно произвести по методу С. А. Чаплыгина с помощью машинного построения функции $s(x)$ [5], удовлетворяющей неравенству

$$s'' - \left[p_1(x)\, s' - \frac{1}{T} s + \psi(x)\right] \geqslant 0, \quad s_0' = s_0 = 0. \tag{12}$$

Однако при этом возникает задача определения интервала, на котором $s(x) \geqslant t(x)$, т. е. промежутка применимости нулевого порядка теоремы С. А. Чаплыгина к (11).

Перепишем неравенство (12) в виде

$$s'' = p_1(x)\, s' - \frac{1}{T} s + \psi(x) + \varphi(x), \quad \varphi(x) \geqslant 0 \tag{13}$$

и вычтем (11) из (13). Получим уравнение, аналогичное (1),

$$v'' = p_1(x)\, v' - \frac{1}{T} v + \varphi(x), \quad v_0' = v_0 = 0, \tag{14}$$

где $v = s - t$.

Для определения интервала знакопостоянства $v(x)$ решим вспомогательное уравнение

$$u = q_1 u' + q_0 u, \quad u'_0 = 1, \quad u_0 = 0. \tag{15}$$

В рассматриваемой системе

$$T = 0{,}3, \quad p_1(x)_{\max} = -6{,}4, \quad p_1(x)_{\min} = -31{,}3.$$

Тогда

$$q_1 = \begin{cases} q_1 = -32, & u' > 0 \\ q_1 = -6, & u' < 0 \end{cases}$$
$$q_0 = -3{,}3.$$

Схема набора для решения (15) приведена на рис. 1, осциллограмма решения, полученного на модели МН-7, показана на рис. 2.

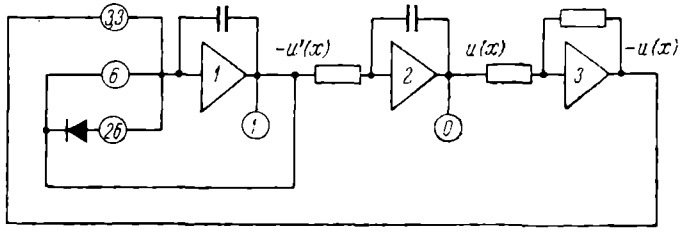



Рис. 1. Схема модели для оценки границ применимости теоремы С. А. Чаплыгина к уравнению (15)

Как видно из осциллограммы $u(x)$, на интервале $0 \leqslant x \leqslant 8$ $u(x) \geqslant 0$. Следовательно, на этом интервале для любых $s(x)$, удовлетворяющих неравенству (12), выполняется неравенство $s(x)$ $t(x)$.

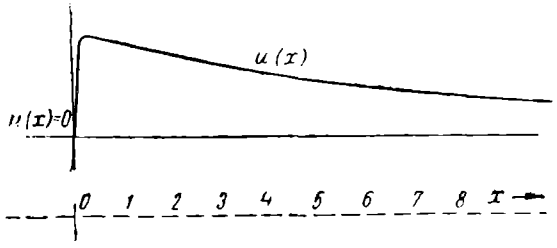



Рис. 2. Осциллограмма решения вспомогательного уравнения (15)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. ГТИ, 1950.

2. Азбелев Н. В. Цалюк З. Б. О задаче Чаплыгина. Укр., математич. журн., 1958, т X, № 1.

3. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. Физматгиз, 1958.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, изд. III, ГИТТЛ, 1951.

5. Школьников А. Д. Применение теоремы С. А. Чаплыгина к оценке погрешности электромоделирования. Зап. ЛГИ, 1961, т. XLV, вып. 1.