Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVI, вып. 3, 1966 г.

УДК 622. 7. 09

РАСЧЕТ ВЕСА ПРОБЫ ДЛЯ СИТОВОГО АНАЛИЗА

Д. А. Краснов

Имеющиеся рекомендации по методике определения веса проб для ситового анализа не всегда обоснованы и разноречивы [Юденич, 1948; Локонов, 1961; Прейгерзон, 1964].

В теоретических исследованиях по этому вопросу некоторые методические положения недостаточно убедительны. В частности является спорным основополагающий принцип определения веса пробы, гласящий: «Требуется определить вес пробы, ситовой анализ которой с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, даст результат $d_{ср}$, лежащий в пределах $(1 \pm 0{,}02)\, D_{ср}$*. [Левенсон, Прейгерзон, 1940, стр. 36].

Поскольку проба предназначается для определения в сыпучем материале количественных соотношений зерен разной крупности, необходимо чтобы число зерен в каждом классе материала пробы соответствовало их действительной числовой доле в опробуемой массе, что должно быть основой расчета веса пробы.

Допустим, в результате случайной выборки из сыпучего материала отобрано n зерен (кусков, частиц). В них $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_s$ — число зерен, размеры которых укладываются в пределы крупности первого, второго, третьего и т. д. классов,

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_s = n.$$

Отношение числа зерен любого класса m_i к общему числу зерен выборки n составит числовую долю зерен этого класса γ_i в выборочной совокупности, их относительную частоту

$$\frac{m_i}{n} = \gamma_i.$$

Когда истинная доля зерен данного класса γ_0 в генеральной совокупности неизвестна, то согласно закону больших чисел можно считать относительную частоту приближенным значением неизвестной доли, т. е. $\gamma_i \approx \gamma_0$.

По теории вероятностей стандарт доли γ_0, т. е. среднеквадратичное отклонение найденной частости от истинного значения этой величины, составит

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma_i (1-\gamma_i)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

* $D_{ср}$ — истинный средневзвешенный диаметр опробуемой сыпучей массы, $d_{ср}$ — средневзвешенный диаметр материала пробы.

Величиной $\frac{n}{N}$ можно пренебречь из-за ее малости, так как величина N — число зерен в генеральной совокупности несравнимо больше n. Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma_i (1-\gamma_i)}{n}}. \quad (1)$$

Отклонения $\gamma_0 - \frac{m_i}{n}$, заключенные между границами $\frac{m_i}{n} - t\sigma$ и $\frac{m_i}{n} + t\sigma$, имеют для больших значений n (более нескольких десятков) приближенно вероятности $\varphi(t)$*.

Из равенства (1) устанавливается объем выборки n' который даст возможность определить неизвестную долю зерен класса в опробуемом материале с какими угодно точностью и надежностью

$$n' = \frac{\gamma_i (1-\gamma_i) t^2}{\Delta^2}, \quad (2)$$

где Δ — заданная абсолютная точность определения γ_i, $\Delta = t\sigma$.

При известном объеме выборки можно определить вес пробы

$$Q = D_{ср}^3 \delta_{ср} n',$$

где $D_{ср}$ — средний диаметр опробуемого материала; $\delta_{ср}$ — средний удельный вес.

Подставив вместо n' его значение из равенства (2), получим

$$Q = D_{ср}^3 \delta_{ср} \frac{\gamma_i (1-\gamma_i) t^2}{\Delta^2}. \quad (3)$$

Удобнее задаваться не абсолютной точностью Δ, а относительной p, выраженной в процентах от γ_i:

$$p = \frac{\Delta}{\gamma_i} \cdot 100.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$Q = D_{ср}^3 \delta_{ср} 100^2 \frac{t^2}{p^2 \gamma_i} (1-\gamma_i). \quad (4)$$

Равенство (4) является теоретической формулой расчета веса пробы для ситового анализа. Она определяет параметры, которые необходимо учитывать, и раскрывает характер влияния на вес пробы каждого из них.

Эту же формулу можно получить эмпирически.

По результатам опытов [Краснов, 1956] определяется суммарная зависимость относительного отклонения m_0 от числа зерен в пробе и их доли:

$$m_0 = C \frac{\sqrt{1-\gamma_i}}{\sqrt{m_i}}, \quad (5)$$

где C — постоянный коэффициент.

Из равенства (5) находим

$$m_i = C^2 \frac{1-\gamma_i}{m_0^2}.$$

Число зерен других классов $(n - m_i)$:

$$(n - m_i) = \frac{m_i (1-\gamma_i)}{\gamma_i}.$$

---

* t — множитель, обычно больше единицы, в пределе принимается равным 3 (правило трех σ). Значения $\varphi(t)$ берутся из таблиц интеграла вероятностей.

Суммарное число зерен

$$n = C^2 \frac{1-\gamma_i}{m_0^2 \gamma_i}.$$

Приняв, что $\sigma \quad 1{,}25\ m_0$ и $p = t\sigma$, получим

$$n = C' \frac{t^2}{p^2 \gamma_i} (1-\gamma_i),$$

где $C' = C^2 1{,}25^2$.

Зная число зерен, находим вес пробы

$$Q = C' D_{\text{ср}}^3 \delta_{\text{ср}} \frac{t^2}{p^2 \gamma_i} (1-\gamma_i). \qquad (6)$$

Идентичность формул (4) и (6), т. е. теоретической и эмпирической, указывает на правильность и обоснованность метода и на то, что найденное решение вопроса является общим.

Если параметры p и t назначаются сообразно с желаемой точностью и надежностью опробования (в пределах их разумных значений) и не создают каких-либо трудностей для расчета веса пробы, то параметры $D_{\text{ср}}$, $\delta_{\text{ср}}$ и γ_i должны находиться экспериментально, что делает применение формулы затруднительным. Однако если сделать некоторые допущения, то формула (4) упростится и может быть рекомендована для применения на практике.

Чтобы избежать необходимости экспериментального нахождения доли расчетного класса и вычисления среднего диаметра допустим, что характеристики крупности опробуемых материалов закономерны. Многие авторы указывают на безусловное наличие таких закономерностей в разнообразных, наблюдаемых в действительности гранулометрических составах рыхлых смесей зерен, полученных дроблением, измельчением или естественной дезынтеграцией, и предлагают соответствующие аналитические выражения [Андреев, Товаров, Перов, 1959]. К сожалению, ни одно из них не может претендовать на универсальность. Мы выбрали уравнение Годэна — Андреева

$$y = Ax^k, \qquad (7)$$

где x — диаметр зерна; y — суммарный выход зерен мельче x; A — коэффициент, определяемый крупностью материала; k — показатель, определяющий побег кривой характеристики (направление и степень ее изгиба).

Далее принимаем, что опробуемый материал в распределении зерен по крупности характеризуется уравнением (7)*

Уравнение Годэна — Андреева позволяет просто решать ряд задач, в том числе определять суммарное число зерен, число зерен в отдельных классах крупности, устанавливать числовую долю зерен той или иной крупности и находить выражение для исчисления среднего диаметра на основе того или иного определяющего свойства. Например, число зерен в любом классе крупности находится из выражения

$$m_i = \frac{A}{\delta} \cdot \frac{k}{k-3} x^{k-3} \left(1 - \frac{1}{r^{k-3}}\right),$$

где r — модуль шкалы грохочения, т. е. показатель соотношения размеров граничных зерен данного класса.

---

* В основу преобразований может быть выбрано и другое выражение закономерности распределения зерен по крупности.

Рассматривая это выражение, видим, что при $k > 3$ показатель степени положителен, число зерен в первом, наиболее крупном, классе будет наибольшим, так как в этом случае x будет соответствовать максимальному диаметру.

При $k < 3$ показатель степени отрицателен, следовательно,

$$m_i = \frac{A}{\delta} \cdot \frac{k}{3-k} \cdot \frac{1}{x^{3-k}} \left(r^{3-k} - 1\right)$$

и число зерен в первом классе будет меньше, чем в любом другом.

При $k = 3$ получается неопределенность, раскрыв которую, найдем, что число зерен в первом классе равно числу зерен в любом другом классе, так как оно зависит только от максимального диаметра и не зависит от других диаметров.

Опыт показывает, что k, особенно в случае дробленых или измельченных материалов, меняется в довольно узких пределах.

В большинстве случаев он колеблется около единицы [Андреев, Товаров, Перов, 1959]. Обоснованно можно принять всегда $k < 3$. Тогда число зерен в первом, самом крупном, классе всегда меньше, чем в любом другом. Поэтому числовую долю зерен этого класса и следует принимать для расчета веса пробы.

Число зерен в расчетном классе

$$m_{\min} = \frac{A}{\delta} \cdot \frac{k}{3-k} \frac{1}{D^{3-k}} \left(r^{3-k} - 1\right),$$

а суммарное число всех зерен в диапазоне крупности от $D_{\min}$ до D, т. е. до максимального размера,

$$n = \frac{A}{\delta} \cdot \frac{k}{3-k} \left(\frac{1}{D_{\min}^{3-k}} - \frac{1}{D^{3-k}} \right)$$

или приближенно

$$n = \frac{A}{\delta} \cdot \frac{k}{3-k} \cdot \frac{1}{D_{\min}^{3-k}},$$

так как при $D_{\min} \to 0$ вычитаемым можно пренебречь. Тогда доля зерен этого класса

$$\gamma_{\min} = \frac{m_{\min}}{n} = \left(r^{3-k} - 1\right) \frac{D_{\min}^{3-k}}{D^{3-k}}, \qquad (8)$$

где D — максимальный диаметр; $D_{\min}$ — минимальный диаметр.

Теперь нам стало известно, долю зерен какого класса следует учитывать в формуле и как она может быть выражена при закономерной характеристике крупности.

Далее находим выражение для среднего диаметра. Определяющий фактор в данном случае — свойство сохранения числа зерен. Поэтому средний диаметр должен быть исчислен по формуле

$$D_{\text{ср}} = \sqrt[3]{\frac{\sum n d^3}{\sum n}}, \qquad (9)$$

где d — средний диаметр узких классов крупности; n — число зерен в этих классах [Андреев, 1951].

Если гранулометрическая характеристика определяется уравнением $y = Ax^k$, то средний диаметр можно более точно вычислить интегрированием

$$D_{ср} = \sqrt[3]{\frac{3-k}{k} D^k D_{min}^{3-k}}. \quad (10)$$

После замены в формуле (4) $D_{ср}$ и $\gamma_i = \gamma_{min}$ их найденными значениями, получим

$$Q = 100^2 \frac{3-k}{k} D^3 \delta_{ср} \frac{t^2}{p^2 (r^{3-k} - 1)}.$$

Чтобы получать вес пробы в *кг* при исчислении диаметра в *см* и удельного веса в $Г/см^3$ постоянный коэффициент должен быть уменьшен в 10^3 раз:

$$Q = 10 \frac{3-k}{k} D^3 \delta_{ср} \frac{t^2}{p^2 (r^{3-k} - 1)}. \quad (11)$$

Полученная формула (11) несколько громоздка. Она содержит шесть коэффициентов, из них три отображают качество опробуемого материала (D — максимальная крупность, *см*, $\delta_{ср}$ — удельный вес, $Г/см^3$ и k — гранулометрическая характеристика), а другие три определяются условиями опробования и последующего анализа (p—точность, t — надежность и r — модуль шкалы грохочения).

Чтобы формулу упростить и сделать удобной для широкого применения, предлагаем некоторые коэффициенты принять постоянными и ограничить пределы изменения других: 1) примем $t = 2{,}58$, тогда вероятность получения пробы с заданной точностью номинально составит 99%; 2) как указывалось ранее, значение коэффициента k в большинстве случаев колеблется около единицы, и мы можем принять $k = 1$; 3) модуль шкалы грохочения ограничим двумя значениями: $r = 2$ и $r = \sqrt{2}$, что соответствует обычному набору сит.

Точность определения доли расчетного класса (точность опробования) необходимо дифференцировать: назначать более высокую для мелких материалов и снижать для крупных с меньшей (по сравнению с мелкими) долей зерен расчетного класса. Это позволит избежать излишне большого веса проб для крупных материалов. Снизив точность по расчетному классу, мы сохраним ее для всех других классов на достаточно высоком уровне, так как доля зерен от крупных классов к мелким увеличивается.

Относительную точность опробования материала крупностью от —1,0 до 0 *мм* примем равной 2,0%. Практически это предельно высокая точность. В материале такой крупности доля зерен расчетного класса γ_{min} составляет 0,01 или 1% (если $r = \sqrt{2}$).

При уменьшении γ_{min} до 10^{-4} примем относительную точность 6,7% и при $\gamma_{min} = 10^{-6}$ $p = 20\%$*. Точки пересечения ординат, соответствующих p и γ_{min}, в логарифмическом масштабе располагаются на одной прямой, что позволило установить аналитическую зависимость между точностью и долей зерен расчетного класса.

$$p = \frac{S}{\sqrt[4]{\gamma_{min}}},$$

где S — постоянный коэффициент, равный 0,71.

---

* Эти пределы точности согласуются с точностью, соответствующей практике отбора проб для ситовых анализов, что может быть установлено соответствующими пересчетами.

Напомним, что

$$\gamma_{min} = (r^{3-k} - 1)\frac{D_{min}^{3-k}}{D^{3-k}}.$$

Подставим в уравнение (10) вместо t и k их принятые значения и заменим p найденным выражением (при этом условно D_{min} принят равным 0,01 *см*). В результате формула (10) станет простой и удобной для практического использования:

$$Q = KD^2\delta_{ср}, \qquad (12)$$

где K — коэффициент, зависящий от модуля шкалы грохочения (классификации) r, например, когда $r = 2$, K округленно равен 1,5, а когда $r = \sqrt{2}$, $K = 3$.

За максимальный размер кусков может быть принят размер отверстия сита, на котором верхний (надрешетный) класс составляет 5%.

Формула может быть применена для определения веса проб, отбираемых от любых сыпучих материалов. В случае прецизионных исследований гранулометрического состава следует пользоваться формулой (11), и тогда необходим предварительный опыт для определения фактического значения коэффициента k в уравнении гранулометрической характеристики.

В формуле учитываются все параметры, определяющие минимальный вес пробы, и среди них — модуль шкалы грохочения (классификации). Влияние его практически сказывается только на точности определения доли первых двух самых крупных классов, соответствующих выбранной шкале. Если вес пробы определен исходя из $r = 2$, то после выделения первых двух классов дальнейший анализ можно производить и при $r = \sqrt{2}$. Поэтому, чтобы не завышать вес пробы, для расчета модуль, равный $\sqrt{2}$, принимается только в случаях, когда анализ выполняется в соответствии с этим модулем, начиная с выделения первого класса.

ЛИТЕРАТУРА

Андреев С. Е. О формулах среднего диаметра, Горн. ж., № 11, 1951.

Андреев С. Е., Товаров В. В., Перов В. А. Закономерности измельчения и исчисление характеристик гранулометрического состава. Металлургиздат, 1959.

Краснов Д. А. Закономерности распределения минеральных зерен при сокращении и определение веса проб полезных ископаемых. Зап. ЛГИ, т. XXXII, вып. 3, 1956.

Левенсон Л. Б., Прейгерзон Г. И. Дробление и грохочение полезных ископаемых. Гостоптехиздат, 1940.

Локонов М. Ф. Опробование на обогатительных фабриках. Госгортехиздат, 1961.

Прейгерзон З. Г. Обогащение угля. Недра, 1964.

Юденич Г. И. Обогащение руд черных металлов. Металлургиздат, 1948.