Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 532.133

К ДВИЖЕНИЮ БЕЗГРАНИЧНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ПОТОКА

Р. И. Шкадов

Рассмотрим двухкомпонентную среду, например, смесь газа или жидкости и взвешенных частиц. Взаимодействие между ними будем учитывать по линейному или квадратичному закону. Движение жидкости предполагаем одноразмерным (вертикальным), установившимся и ламинарным. Поток простирается достаточно широко в горизонтальных направлениях, так что никакие вертикальные стенки не рассматриваются. Особое значение имеет выбор уравнений сплошности. В работах автора [Шкадов, 1961; Шкадов, 1964] сделана попытка использования уравнений неразрывности, специально выведенных для рассматриваемого случая, однако трудности распространения их на трехмерное пространство заставили автора перейти на общепринятые уравнения неразрывности [Баренблатт, 1953; Неронов, 1964; Шкадов, 1958].

Рассмотрим взаимодействие между компонентами по линейному закону. Направим ось z вертикально вниз и будем считать, что жидкость и взвешенные частицы движутся в ту же сторону. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_1(1-s)v\frac{dv}{dz}=-(1-s)\frac{dp}{dz}-\gamma\mu s(v-u)+\frac{4}{3}\mu(1-s)\frac{d^2v}{dz^2}+\rho_1(1-s)g,\\ \rho_2 su\frac{du}{dz}=-\gamma\mu s(u-v)+\rho_2 sg,\\ \frac{d}{dz}[\rho_1(1-s)v]=0,\\ \frac{d}{dz}(\rho_2 su)=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где γ — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально; ρ_1 — плотность жидкой компоненты, $\rho_1 = \text{const}$; ρ_2 — плотность твердой компоненты, $\rho_2 = \text{const}$; μ — кинематический коэффициент вязкости; s — коэффициент замутненности; u — скорость взвешенных частиц; v — скорость жидкости; p — гидродинамическое давление; g — ускорение силы тяжести. В определенных условиях течения (диапазона изменения критерия Рейнольдса Re) γ можно считать постоянным.

Граничные условия: при $z = z_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, $s = s_0$, $p = p_0$.

Два последние уравнения системы (1) сразу же интегрируются:

$$(1-s)v=c_1,\quad su=c_2,$$

где $c_1 = (1 - s_0)\, v_0$, $c_2 = s_0 u_0$.

Как уже было сказано, обе скорости — жидкой и твердой фаз — в начальном сечении $z = z_0$ направлены вертикально вниз. Поэтому $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Далее выражаем переменные v и s через u, что дает $v=\frac{c_1 u}{u-c_2}$, $s=\frac{c_2}{u}$.

Подставим полученные выражения во второе уравнение системы (1), которое после преобразований примет вид

$$\frac{u(u-c_2)}{g(u-c_2)-au(u-c_1-c_2)}\,du=dz, \tag{2}$$

где $a=\dfrac{\gamma\mu}{\rho_2}$.

Дискриминант Δ_1 квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, будет

$$\Delta_1=\left(\frac{g}{a}+c_1+c_2\right)^2-\frac{4g}{a}c_2=\left(\frac{g}{a}+c_1-c_2\right)^2+4c_1c_2.$$

$\Delta_1>0$ в силу сделанного замечания относительно знаков c_1 и c_2. Трехчлен может быть разложен на линейные множители. Обозначим его корни через u_1 и u_2. Тогда после интегрирования

$$u-u_0-\frac{\left(\frac{g}{a}+c_1\right)u_1-\frac{g}{a}c_2}{u_2-u_1}\ln\frac{u-u_1}{u_0-u_1}+$$
$$+\frac{\left(\frac{g}{a}+c_1\right)u_2-\frac{g}{a}c_2}{u_2-u_1}\ln\frac{u-u_2}{u_0-u_2}+a(z-z_0)=0.$$

Мы получили зависимость между скоростью твердых частиц и z. Аналогичные неявные зависимости можно написать для v и s.

$$\frac{s_1+s_2-s_1s_2}{s_1^2s_2^2}\ln\frac{s}{s_0}-\frac{1-s}{s_1^2(s_2-s_1)}\ln\frac{s-s_1}{s_0-s_1}+$$
$$+\frac{1-s_2}{s_2^2(s_2-s_1)}\ln\frac{s-s_2}{s_0-s_2}-\frac{1}{s_1s_2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s_0}\right)=\frac{g}{c_2}(z-z_0),$$

$$\frac{v_1v_2-c_1^2}{(v_1-c_1)^2(v_2-c_1)^2}\ln\frac{v-c_1}{v_0-c_1}-\frac{v_1}{(v_1-c_1)^2(v_2-v_1)}\ln\frac{v-v_1}{v_0-v_1}+$$
$$+\frac{v_2}{(v_2-c_1)^2(v_2-v_1)}\ln\frac{v-v_2}{v_0-v_2}-\frac{c_1}{(c_1-v_1)(c_1-v_2)}\left(\frac{1}{v-c_1}-\frac{1}{v_0-c_1}\right)+$$
$$+\frac{a}{c_1c_2^2}(z-z_0)=0,$$

где s_1 и s_2 — корни квадратного трехчлена $ac_2-(ac_1+ac_2+g)s+gs^2$; v_1 и v_2 — корни трехчлена $v^2+\left(c_1+c_2-\dfrac{g}{a}\right)v-\dfrac{g}{a}c_1$.

Давление p можно найти из первого уравнения системы (1).

Если взять случай, когда движение двухкомпонентной жидкости происходит вверх, то система (1) примет вид (ось z направлена вверх)

$$\rho_1(1-s)v\frac{dv}{dz}=-(1-s)\frac{dp}{dz}-\gamma\mu s(v-u)+\frac{4}{3}\mu(1-s)\frac{d^2v}{dz^2}-\rho_1(1-s)g,$$

$$\rho_2su\frac{du}{dz}=-\gamma\mu s(u-v)-\rho_2sg,$$

$$\frac{d}{dz}[\rho_1(1-s)v]=0,$$

$$\frac{d}{dz}(\rho_2su)=0.$$

Уравнение для определения u в этом случае несколько отличается от того, какое мы имели при движении в противоположную сторону

$$\frac{u(u-c_2)\,du}{g(u-c_2)+au(u-c_1-c_2)}=-dz.$$

Дискриминант трехчлена, стоящего в знаменателе, всегда положителен. Поэтому если обозначить корни трехчлена через u_3 и u_4, то после интегрирования получим

$$u-u_0-\frac{\left(c_1-\frac{g}{a}\right)u_3+\frac{g}{a}c_2}{u_4-u_3}\ln\frac{u-u_3}{u_0-u_3}+$$
$$+\frac{\left(c_1-\frac{g}{a}\right)u_4+\frac{g}{a}c_2}{u_4-u_3}\ln\frac{u-u_4}{u_0-u_4}+a(z-z_0)=0.$$

Конечно, эта функция имеет смысл только до такого сечения z, в котором скорость u обращается в нуль. Такие же зависимости можно вывести для v и s.

В случае взаимодействия между компонентами по квадратичному закону основная система дифференциальных уравнений перепишется так (предполагается, что на начальном этапе $u < v$):

$$\left.\begin{aligned}
\rho_1(1-s)v\frac{dv}{dz}&=-(1-s)\frac{dp}{dz}-\lambda s(v-u)^2+\\
&+\frac{4}{3}\mu(1-s)\frac{d^2v}{dz^2}+\rho_1(1-s)g,\\
\rho_2 su\frac{du}{dz}&=\lambda s(v-u)^2+\rho_2 sg,\\
\frac{d}{dz}&[\rho_1(1-s)v]=0,\\
\frac{d}{dz}&(\rho_2 su)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально. Если обозначить $b=\frac{\lambda}{\rho_2}$, то второе уравнение системы (3) после преобразований и использования интегралов третьего и четвертого уравнений примет вид

$$\frac{du}{dz}=\frac{bu^2(c_1+c_2-u)^2+g(u-c_2)^2}{u(u-c_2)^2}.$$

Отсюда

$$z-z_0=\int_{u_0}^{u}\frac{u(u-c_2)^2\,du}{g(u-c_2)^2+bu^2(c_1+c_2-u)^2}.$$

Аналогично

$$z-z_0=-c_1c_2^2\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{(v-c_1)\,[bv^2(v-c_1-c_2)^2+g(v-c_1)^2]},$$

$$z-z_0=-c_2^2\int_{s_0}^{s}\frac{(1-s)^2\,ds}{bs\,[(c_1+c_2)s-c_2]^2+gs^3(1-s)^2}.$$

Задача принципиально решена. Приведенные интегралы легко вычисляются при конкретных значениях постоянных.

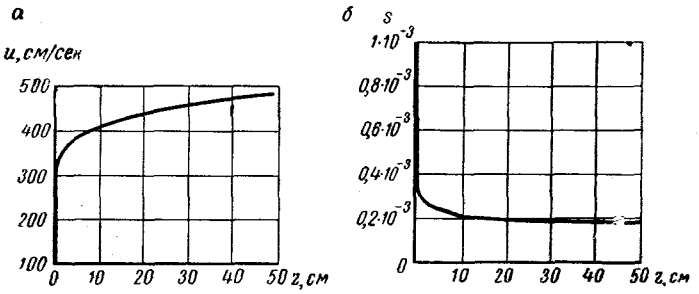
Во всем предыдущем мы предполагали, что коэффициент вязкости остается постоянным. Пусть теперь этот коэффициент зависит от замутненности среды, причем эта зависимость выражается линейным законом

$$\mu=\mu_0(1+\alpha s),\qquad(4)$$

где μ_0 — значение коэффициента вязкости жидкости при отсутствии взвешенных частиц; α — некоторая постоянная, $\alpha\approx 2{,}5$.

Применим (4) к случаю линейного закона сопротивления. Основная система (1) усложнится и примет вид

$$\left.\begin{aligned}
\rho_1(1-s)\,v\frac{dv}{dz} &= -(1-s)\frac{dp}{dz} - \gamma\mu_0(1+\alpha s)\,s\,(v-u) + \\
&+ \frac{4}{3}(1+\alpha s)(1-s)\frac{d^2v}{dz^2} + \rho_1(1-s)\,g, \\
\rho_2 s u\frac{du}{dz} &= -\gamma\mu_0(1+\alpha s)\,s\,(u-v) + \rho_2 s g, \\
\frac{d}{dz}[\rho_1(1-s)\,v] &= 0, \\
\frac{d}{dz}(\rho_2 s u) &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$



Графики зависимости: *а* — скорости твердой фазы; *б* — замутненности.

Второе уравнение этой системы можно сделать зависящим только от u и z. Получим

$$-\frac{1}{a}\cdot\frac{u\,(u-c_2)\,du}{u^2+\left(\alpha c_2 - c_1 - c_2 - \frac{g}{a}\right)u + \frac{g}{a}c_2 - \alpha c_2(c_1+c_2)} = dz.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе

$$\Delta_2 = \left(\alpha c_2 - c_1 - c_2 - \frac{g}{a}\right)^2 - 4c_2\left[\frac{g}{a} - \alpha(c_1+c_2)\right] =$$
$$= \left(\frac{g}{a} + c_1 - c_2 - \alpha c_2\right)^2 + 4c_1c_2 + 2\alpha c_2^2 + 4\alpha c_1 c_2 > 0.$$

Обозначим корни этого трехчлена через u_5 и u_6. Тогда после интегрирования

$$\frac{1}{a}(u_0-u) - \frac{1}{a}\cdot\frac{(u_5-c_2)\,u_5}{u_5-u_6}\ln\frac{u-u_5}{u_0-u_5} + \frac{1}{a}\cdot\frac{(u_6-c_2)\,u_6}{u_5-u_6}\ln\frac{u-u_6}{u_0-u_6} = z - z_0.$$

Полученная функция не отличается от той, которую мы имели при постоянном значении коэффициента вязкости μ. Аналогично

$$\frac{s_5+s_6-s_5s_6}{s_5^2s_6^2}\ln\frac{s}{s_0} - \frac{1-s_5}{s_5^2(s_6-s_5)}\ln\frac{s-s_5}{s_0-s_5} + \frac{1-s_6}{s_6^2(s_6-s_5)}\ln\frac{s-s_6}{s_0-s_6} -$$
$$- \frac{1}{s_5s_6}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right) = \frac{g-\alpha a\,(c_1+c_2)}{c_2^2}(z-z_0),$$

$$\frac{v_5v_6-c_1^2}{(v_5-c_1)^2(v_6-c_1)^2}\ln\frac{v-c_1}{v_0-c_1} - \frac{v_5}{(v_5-c_1)^2(v_6-v_5)}\ln\frac{v-v_5}{v_0-v_5} +$$
$$+ \frac{v_6}{(v_6-c_1)^2(v_6-v_5)}\ln\frac{v-v_6}{v_0-v_6} - \frac{c_1}{(c_1-v_5)(c_1-v_6)}\left(\frac{1}{v-c_1} - \frac{1}{v_0-c_1}\right) +$$
$$+ \frac{a\,(1+\alpha)}{c_1c_2^2}(z-z_0) = 0,$$

где s_5, s_6 и v_5, v_6 — корни трехчленов, получившихся в знаменателях дробей, стоящих в дифференциальных уравнениях для s и v *.

Пример. Рассмотрим движение кварцевой пыли размером $d=0{,}01$ *см*, плотность которой $\rho_2=2{,}7$ *г/см*^{3}, в смеси с воздухом ($\rho_1=0{,}00123$ *г/см*^{3}) при наличии квадратичного закона сопротивления. Примем следующие граничные значения интересующих нас элементов: $s_0=0{,}001$, $u_0=100$ *см/сек*, $v_0=500$ *см/сек*. Коэффициент λ для сделанных предположений относительно Re можно найти по следующей формуле [Лященко, 1940]: $\lambda=\frac{\rho_1}{2d}$.

Вычисления дают $\lambda=0{,}0615$ *г/см*^{4}, $c_1\simeq 500$ *см/сек*, $c_2=0{,}1$ *см/сек*, $b=0{,}0228\ \frac{1}{см}$.

Дифференциальное уравнение для скорости u примет вид

$$\frac{du}{dz}=\frac{0{,}0228u^2(500+0{,}1-u)^2+981\,(u-0{,}1)^2}{u\,(u-0{,}1)^2}.$$

После упрощений и преобразований

$$\frac{u\,du}{u^2-100u+293\,000}=0{,}0228dz.$$

Интегрирование дает

$$z=101\lg\frac{(500-u)^2+43\,000}{203\,000}+116-106\ \operatorname{arctg}\frac{500-u}{207}.$$

Вычисления показывают, что скорость u скачком увеличивается от 100 до 340 *см/сек*, а затем плавно возрастает на протяжении 48 *см* до 500 *см/сек* (рисунок, *а*). Указанный скачок объясняется тем, что в граничном сечении твердые частицы подхватываются основным потоком, скорость которого больше скорости частиц.

Закон изменения скорости v найдем из формулы $(1-s)\,v=c_1$.

Откуда $v\simeq c_1$, т. е. скорость воздуха почти не меняется.

График (рисунок, *б*) показывает, что замутненность резко уменьшается от 10^{-3} до $0{,}29\cdot10^{-3}$, а потом плавно убывает на протяжении 48 *см* до $0{,}2\cdot10^{-3}$. Для построения графика использовалась формула $s=\frac{c_2}{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. Прикладная математика и механика, т. 18, 1953.

Лященко П. В. Гравитационные методы обогащения. Гостоптехиздат, 1940.

Неронов Н. П. Об условии неразрывности в гидродинамике. Зап. ЛГИ, т. XLIV, вып. 3, 1964.

Шкадов Р. И. О движении взвешенных частиц в потоке газа. Зап. ЛГИ, т. XXXVI, вып. 3, 1958.

Шкадов Р. И. О движении взвешенных частиц в потоке газа. Зап. ЛГИ, т. XXXVII, вып. 3, 1961.

Шкадов Р. И. О некоторых случаях ламинарного движения смеси вязкой жидкости с твердыми частицами. Зап. ЛГИ, т. XLIV, вып. 3, 1964.

* Первое уравнение в системах (1), (3) и (5) является единственным, которое накладывает условие ламинарного режима течения. Так как при решении задачи это уравнение не участвует, то полученные результаты могут быть использованы и для турбулентных течений.