Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 533.17

ОБ УРАВНЕНИЯХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕВЯЗКОГО ГАЗА

Г. А. Колтон

При исследовании некоторых задач обтекания тел сверхзвуковым потоком газа систему уравнений гидромеханики удобнее записывать не в декартовых, а в естественных координатах. Аналогичные координаты были использованы при решении задач обтекания плоских и осесимметричных тел гиперзвуковым потоком газа методом «пограничного слоя» [Черный, 1959; Фримен, 1959; Гонор, 1958].

Рассмотрим обратную задачу обтекания тела сверхзвуковым потоком невязкого газа. Поверхность сильного разрыва, образующегося перед телом, будем считать заданной параметрически

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(q^2, q^3), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где $\bar{x}_i$ — декартовы координаты точек, лежащих на поверхности разрыва; q^2, q^3 — криволинейные координаты, введенные на поверхности разрыва.

Рассмотрим некоторую точку M с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3), лежащую позади ударной волны. Пусть кривая PM — линия тока, проходящая через точку M. Точку пересечения P этой линии с поверхностью разрыва назовем точкой входа. Если через q^1 обозначить длину дуги PM, то положение точки M вполне определяется тремя координатами q^1, q^2, q^3, где q^2, q^3 — криволинейные координаты точки входа, т. е.

$$x_i = x_i(q^j), \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Якобиан преобразования (2) обозначим через d

$$d = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q^j} \right|, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Введем в рассмотрение фундаментальный ковариантный тензор

$$g_{ik} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^k} * . \tag{3}$$

Через его компоненты определяется квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками

$$ds^2 = g_{ik}\, dq^i\, dq^k.$$

Вдоль линии тока $ds = dq^1$; $dq^2 = dq^3 = 0$, поэтому

$$g_{11} = 1. \tag{4}$$

Обозначим через $v^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt}$ — контрвариантные составляющие вектора скорости частицы газа. Очевидно, что

$$v^1 = \frac{dq^1}{dt}; \quad v^2 = v^3 = 0. \tag{5}$$

* Здесь и далее знак суммы опускается, а суммирование осуществляется по индексу, повторяющемуся дважды.

Уравнения движения частицы газа в ковариантных составляющих примут вид [Кочин, 1961]

$$\rho v^\alpha \nabla_\alpha v^k = -\frac{\partial P}{\partial q^k}. \tag{6}$$

Здесь $v_k = q_{\alpha k} v^\alpha = q_{1k} v^1$ — ковариантные составляющие вектора скорости.

Учитывая (5), получим

$$\rho v^\alpha \nabla_\alpha v_k = \rho v^1 \left[\frac{\partial (g_{1k} v^1)}{\partial q^1} - g_{1\beta} \Gamma^\beta_{k1} v^1 \right].$$

При этом в силу (4)

$$g_{1\beta} \Gamma^\beta_{k1} = \Gamma_{1,\,k1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{1k}}{\partial q^1} \right) = 0.$$

Здесь $\Gamma^\beta_{k\alpha}$; $\Gamma_{n,\,mi}$ — символы Кристоффеля 2 и 1 рода соответственно.

Уравнения движения (6) перепишутся

$$\rho v^1 \frac{(v^1 g_{1k})}{\partial q^1} = -\frac{\partial P}{\partial q^k}, \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

В частности при $k = 1$ будем иметь

$$\rho v^1 \frac{\partial (v^1)}{\partial q^1} = -\frac{\partial P}{\partial q^1}. \tag{9}$$

Уравнения движения (8) можно представить в другом виде, более удобном в некоторых приложениях. Для этого преобразуем (8)

$$\rho v^1 v^1 \Gamma_{k,\,11} + \rho v^1 g_{1k} \frac{\partial v^1}{\partial q^1} = -\frac{\partial P}{\partial q^k}. \tag{10}$$

Умножаем (10) на Γ^k_{11} и суммируем по индексу k:

$$\rho v^1 v^1 \Gamma_{k,\,11} \Gamma^k_{11} + \rho v^1 g_{1k} \Gamma^k_{11} \frac{\partial v^1}{\partial q^1} = -\Gamma^k_{11} \frac{\partial P}{\partial q^k}. \tag{11}$$

В силу (7) $g_{1k} \Gamma^k_{11} = 0$. Тогда вместо (11) получим

$$\rho v^1 v^1 \Gamma_{k,\,11} \Gamma^k_{11} = -\Gamma^k_{11} \frac{\partial P}{\partial q^k}. \tag{12}$$

Далее понадобятся следующие соотношения, которые легко можно проверить,

$$\begin{gathered} \Gamma^k_{11} \Gamma_{k,\,11} = K^2, \\ \Gamma^k_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} K \sqrt{G_{kk}} \cos \theta_k, \end{gathered} \tag{13}$$

где K — кривизна линии тока; θ_k — угол между главной нормалью к линии тока и нормалью к координатной поверхности $q^k = \text{const}$; G_{ik} — алгебраическое дополнение к элементу g_{ik} фундаментального определителя $g = |g_{ik}| = d^2$.

Учитывая (13), уравнение (12) запишем в виде

$$\rho v^1 v^1 \sqrt{g}\, K = -a_i \frac{\partial P}{\partial q^i}, \tag{14}$$

где

$$a_i = \sqrt{G_{ii}} \cos \theta_i. \tag{15}$$

Заметим, что в (15) суммировать по индексу i не надо. Легко видеть, что (14) представляет собой уравнение количества движения в проекции на главную нормаль к линии тока.

Уравнение неразрывности в криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial(\rho v^{\alpha}\sqrt{g})}{\partial q^{\alpha}}=0. \tag{16}$$

Из (16) и (5) следует, что

$$\frac{\partial(\rho v^{1}\sqrt{g})}{\partial q^{1}}=0,$$

т. е. величина $Q=\rho v^{1}\sqrt{g}$ постоянна вдоль линии тока.

Уравнение сохранения энергии в рассматриваемых координатах

$\frac{\partial s}{\partial q^{1}}=0$, где s — энтропия частицы газа.

Вводя энтальпию газа i, получим

$$\rho\frac{\partial i}{\partial q^{1}}=\frac{\partial P}{\partial q^{1}}. \tag{17}$$

Отметим, что из (17) и (9) следует существование интеграла Бернулли.

В координатах (q^1, q^2, q^3) уравнение фронта ударной волны $q^1=0$.

Направим ось x_1 декартовой системы координат по вектору скорости набегающего потока $\overline{V}$. Тогда в криволинейных координатах (q^1, q^2, q^3) для контравариантных и ковариантных составляющих вектора $\overline{V}$ легко получить выражения $V^k=\frac{\partial q^k}{\partial x_1}$, $V_k=\frac{\partial x_1}{\partial q^k}$.

Условие сохранения массы при переходе через скачок в безразмерной форме имеет вид $\rho v^1=V^1$,
или

$$v^{1}=\tau\frac{\partial q^{1}}{\partial x_{1}}\qquad\left(\tau=\frac{1}{\rho}\right). \tag{18}$$

Из тождества

$$\frac{\partial x_k}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial q^i}{\partial x_1}=\delta_1^k \text{ находим } \frac{\partial q^1}{\partial x_1}=\frac{D_{11}}{d},$$

где $\delta_i^k=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$; D_{ik} — алгебраическое дополнение к элементу $\frac{\partial x_i}{\partial q^k}$ определителя d (k — номер строки, i — номер столбца определителя).

Заметим, что величины D_{1j} известны на поверхности сильного разрыва в силу (1).

Формула (18) перейдет в

$$v^{1}=\frac{\tau}{\sqrt{g}}D_{11}. \tag{19}$$

Условие непрерывности на скачке касательной составляющей вектора скорости можно записать

$$v_k=V_k,\ (k=2,3)$$

или

$$v^{1}g_{1k}=\frac{\partial x_1}{\partial q^k},\qquad (k=2,3). \tag{20}$$

Фундаментальный определитель g на скачке, используя (20), представим в виде

$$g=G_{11}-\frac{1}{v^1v^1}(D_{12}^2+D_{13}^2). \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует

$$g=\frac{G_{11}D_{11}^2}{D_{12}^2+D_{13}^2+\tau^2D_{11}^2},\quad v^1=\frac{\sqrt{D_{12}^2+D_{13}^2+\tau^2D_{11}^2}}{\sqrt{G_{11}}},\quad Q=D_{11}.$$

Тогда законы сохранения импульса и энергии на скачке примут вид

$$P=\frac{1}{\varkappa M^2}+(1-\tau)\frac{D_{11}^2}{G_{11}},\quad i=\frac{1}{(\varkappa-1)M^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{D_{12}^2+D_{13}^2+\tau^2D_{11}^2}{G_{11}}\right),$$

где M — число Маха набегающего потока. Отметим, что на скачке $G_{11}=\gamma$, где $\gamma=|\gamma_{ik}|$ — фундаментальный определитель на поверхности сильного разрыва,

$$\gamma_{ik}=\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\bar{x}_\alpha}{\partial q^k}=g_{ik}|_{q^1}=0,\qquad (ik=2,3).$$

Таким образом, обратная задача обтекания тела сверхзвуковым потоком невязкого газа сводится к решению системы уравнений

$$\rho v^1\frac{\partial(v^1g_{1k})}{\partial q^1}=-\frac{\partial p}{\partial q^k}\qquad (k=1,2,3),$$

$$Q=\rho v^1\sqrt{g}=D_{11s},\quad \rho\frac{\partial i}{\partial q^1}=\frac{\partial p}{\partial q^1},\quad \rho=\rho(p,i),$$

при следующих условиях на фронте ударной волны ($q^1=0$):

$$v_s^1=\frac{\sqrt{D_{12s}^2+D_{13s}^2+\tau_s^2D_{11s}^2}}{\sqrt{G_{11s}}},$$

$$g_{1ks}=\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial q^k}\cdot\frac{\sqrt{G_{11s}}}{\sqrt{D_{12s}^2+D_{13s}^2+\tau_s^2D_{11s}}},\qquad (k=2,3)$$

$$p_s=\frac{1}{\varkappa M^2}+(1-\tau_s)\frac{D_{11s}^2}{G_{11s}},$$

$$i_s=\frac{1}{(\varkappa-1)M^2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{D_{12s}^2+D_{13s}^2+\tau_s^2D_{11s}^2}{G_{11s}}\right].$$

Здесь индексом s показаны значения соответствующих величин на поверхности сильного разрыва.

Поскольку в работе рассматривается обратная задача обтекания, то поверхность сильного разрыва считается заданной уравнениями (1), а поверхность обтекаемого тела должна быть найдена в процессе решения задачи. Если поверхность сильного разрыва не имеет изломов, т. е. производные $\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial g^j}$ $(i=1,2,3;\ j=2,3)$ суть непрерывные функции своих аргументов, то за поверхность тела следует принять поверхность тока, проходящую через кривую, вдоль которой скорость частиц равна 0. Это соответствует случаю обтекания тела с отсоединенной ударной волной. Если же поверхность сильного разрыва имеет излом, то поверхностью тела является поверхность тока, проходящая через кривую, вдоль которой терпят разрыв производные $\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial q^j}$. Это соответствует случаю обтекания тела с присоединенной ударной волной.

Расстояние до тела от фронта ударной волны будем измерять по нормали N к фронту. Вдоль нормали N, проходящей через точку $M_0(q_0^2,\ q_0^3)$ поверхности сильного разрыва, соблюдается соотношение

$$\frac{dx_i}{ds}=A_i,\qquad (22)$$

где $A_i=\frac{D_{1i}^0}{\sqrt{D_{1k}^0D_{1k}^0}}$ — направляющие косинусы нормали. Величины D_{1i}^0 вычислятся в точке M_0.

Переходя в (22) к криволинейным координатам q_i, получим

$$ds = \sqrt{g} \cdot \frac{dq^1}{A_i D_{1i}}, \tag{23}$$

$$\frac{dq^\alpha}{dq^1} = \frac{A_j D_{\alpha j}}{A_i D_{1i}}, \qquad (\alpha = 2, 3). \tag{24}$$

Уравнения (24) — дифференциальные уравнения геометрического места точек входа линий тока, пересекающих нормаль N.

Начальные условия для (24) при $q^1 = 0$, $q^\alpha = q_0^\alpha$ ($\alpha = 2, 3$). Из (23) находим

$$s = \int_0^{q^1} \tau \frac{Q dq^1}{v^1 A_i D_{1i}}. \tag{25}$$

При этом в подынтегральном выражении формулы (25) нужно положить $q^\alpha = \psi_\alpha(q^1, q_0^2, q_0^3)$, ($\alpha = 2, 3$), где функции $\psi_\alpha(q^1, q_0^2, q_0^3)$ суть решения уравнений (24).

Тогда для расстояния от фронта ударной волны до поверхности тела получим

$$\Lambda = \int_0^{\bar{q}^1} \tau \frac{Q dq^1}{v^1 A_i D_{1i}},$$

где $\bar{q}^1$ — длина линии тока, проходящей через нормаль N и лежащей на поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 7, 1958.

Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, 1961.

Фримен Н. К теории гиперзвукового потока, обтекающего плоские и осесимметричные тела. В сб. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. ИЛ, 1959.

Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.