Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 532.501.32

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА

В. Я. Бриль

Рассматривается нестационарный осесимметричный незакрученный поток несжимаемой идеальной жидкости при отсутствии массовых сил. Задача решается в цилиндрической системе координат (r, φ, z), начало которой совпадает с центром круглого выходного отверстия весьма большого диаметра, ось z — с осью симметрии потока, положение плоскости $\varphi = 0$ безразлично в связи с осевой симметрией.

При сделанных допущениях Эйлеровы уравнения движения и уравнение несжимаемости [Ламб, 1947; Кочин, Кибель, Розе, 1948] примут вид

$$\left.\begin{aligned} v\frac{\partial v}{\partial r} + u\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}, \\ v\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}, \\ v + r\frac{\partial v}{\partial r} + r\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где искомыми функциями являются следующие: $u\,(r,\ z,\ t)$ — осевая составляющая скорости; $v\,(r,\ z,\ t)$ — радиальная составляющая скорости; $p\,(r,\ z,\ t)$ — давление.

Краевые условия системы (1) формально могут быть заданы на любой поверхности $F\,(r,\ z,\ t) = 0$ пространства $(r,\ z,\ t)$. Часто их задают в виде начальных условий на плоскости $t = 0$.

Однако для струйных задач ни теория, ни эксперимент не дают обоснованных рекомендаций относительно выбора начальных условий. Наиболее точному количественному учету поддаются «условия истечения» потока (в плоскости вблизи выходного отверстия $z = 0$). Определяющее влияние этих условий на характер дальнейшего движения подчеркивается многими авторами [Рэлей, 1955; Журавский, 1959; Weber, 1932]. Естественно поэтому поставить вопрос о решении системы (1), краевыми условиями которой являлись бы упомянутые условия истечения.

Согласно теореме Ковалевской [Смирнов, 1951] для однозначного решения системы (1) достаточно иметь следующие условия истечения:

$$\left.\begin{aligned} u\,(r, z, t)\,|_{z=0} &= u_0(r, t), \\ v\,(r, z, t)\,|_{z=0} &= v_0\,(r, t), \\ p\,(r, z, t)|_{z=0} &= p_0\,(r, t), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где u_0, v_0 и p_0 — известные функции.

Поверхность $z = 0$, на которой заданы краевые условия, не является характеристической поверхностью системы (1), поэтому, решая (1) относительно $\frac{\partial}{\partial z}$, имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{u}\left(v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho\left(\frac{uv}{r} + u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если функции u_0, v_0, p_0 бесконечно дифференцируемы по всем аргументам, то (2) и (3) дают возможность определить все коэффициенты разложения искомых функций в соответствующие ряды Маклорена.

Для получения более обозримых результатов, имеющих, как будет показано ниже, ряд интересных следствий, конкретизируем краевые условия (2). Будем считать, что начальные функции не зависят от r. Тогда $v(r, z, t)\,/_{z=0} = v_*(t)$ по предположению не зависит от r. Однако из условия осевой симметрии и в связи с однозначностью векторного поля скорости имеем на оси $v(0, z, t) = 0$, в частности $v(0, 0, t) = 0$, а следовательно, и $v(r, 0, t) = v_*(t) \equiv 0$.

Таким образом, краевые условия примут вид

$$\left.\begin{aligned} u(r, z, t)\,|_{z=0} &= u_*(t) > 0, \\ v(r, z, t)\,|_{z=0} &\equiv 0, \\ p(r, z, t)\,|_{z=0} &= p_*(t) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда коэффициентами Маклорена искомых функций будут

$$\left.\frac{\partial^{k+s+m}u}{\partial r^k \partial z^s \partial t^m}\right|_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{d^m u_*}{dt^m}, & \text{если } k = s = 0, \\ 0, & \text{если } k + s > 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^{k+s+m}v}{\partial r^k \partial z^s \partial t^m}\right|_{z=0} \equiv 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^{k+s+m}p}{\partial r^k \partial z^s \partial t^m}\right|_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{d^m p_*}{dt^m}, & \text{если } k = s = 0 \\ -\rho\dfrac{d^{m+1}u_*}{dt^{m+1}}, & \text{если } k = 0,\ s = 1 \\ 0, & \text{если } k > 0 \\ 0, & \text{если } s > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Искомые функции системы (1) можно получить, подставляя (5), (6) и (7) в ряды Маклорена для соответствующих функций трех переменных ($f = u,\ v,\ p$)

$$f(r, z, t) = \sum_{k+s+m=0}^{\infty} \frac{1}{k!\ s!\ m!}\, \underset{r^k z^s t^m}{f^{(k+s+m)}}(0, 0, 0)\, r^k z^s t^m. \tag{8}$$

Однако при сделанных предположениях тот же результат проще получить, считая аргументы r и t произвольными, но фиксированными величинами и разлагая $f(r, z, t)$ только по степеням z

$$f(r, z, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!}\, f_{z^s}^{(s)}(r, 0, t)\, z^s. \tag{9}$$

Подставляя в (9) коэффициенты из (5), (6) и (7), получим соответственно

$$u(r, z, t) = u_*(t), \tag{10}$$

$$v(r, z, t) \equiv 0, \tag{11}$$

$$p(r, z, t) = p_*(t) - \rho z \frac{du_*}{dt}. \tag{12}$$

Зная (10) и (11), давление (12) можно получить и независимо — из интеграла Коши [Ламб, 1947; Кочин, Кибель, Розе, 1948.]

Действительно, из (10) и (11) следует, что поток потенциальный с потенциалом скорости

$$\varphi = u_* z. \tag{13}$$

Подставляя (13) в интеграл Коши, имеем

$$z \frac{du_*}{dt} + \frac{u_*^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t). \tag{14}$$

Полагая в (14) $z = 0$, получим

$$\frac{u_*^2}{2} + \frac{p_*}{\rho} = F(t). \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем (12).

Анализ полученного решения (10) — (12) системы (1) позволяет сделать следующие выводы, практически приложимые и к случаю гидромониторной (свободной незатопленной) струи.

1. Независимость осевой составляющей скорости от z (10) соответствует рассматриваемому случаю несжимаемой жидкости и, следовательно, бесконечно большой скорости распространения в ней продольных колебаний.

2. Формула (12) дает возможность определить длину неразрывной (связной) части струи [Бриль, 1964], обозначим эту «критическую длину» $L_{кр}$.

Действительно, для идеальной жидкости

$$p \geqslant 0. \tag{16}$$

Условие нарушения сплошности

$$p = 0. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (12), имеем

$$L_{кр}(t) = z_p(t) = \frac{p_*(t)}{\rho u_*'(t)}, \tag{18}$$

где z_p — зависящая от времени аппликата плоскости разрыва.

Зная $p_*(t)$ и $u_*(t)$, можно найти минимум $L_{кр}(t)$

$$L = \min L_{кр}(t) = L_{кр}(t_{\min}) = \frac{p_*(t_{\min})}{\rho u_*'(t_{\min})}, \tag{19}$$

где $t_{\min}$ — решение уравнения

$$L_{кр}'(t) = 0, \tag{20}$$

т. е. $p_*' u_*' - p_* u_*'' = 0$, где p_* — дифференцируемая, а u_* — дважды дифференцируемая функции времени.

3. Для стационарной струи $u_* = \text{const}$, и из (18) для этого частного случая имеем $L = L_{кр} = \infty$.

4. Считая [Кочин, Кибель, Розе, 1948 и др.] давление на выходе из насадка равным атмосферному давлению p_a, получим из (18)

$$L_{кр} = \frac{p_a}{\rho u_*'(t)}, \tag{21}$$

что позволяет высказать гипотезу о формирующем влиянии на струю внешнего (атмосферного) противодавления.

Для нестационарной струи в пустоте

$$L = L_{кр} = 0. \tag{22}$$

Прекрасное экспериментальное подтверждение как гипотезы о формирующем влиянии на струю атмосферного давления, так и вывода о нулевой длине нестационарной струи в пустоте можно найти в работе Д. У. Ли и Р. Сненсера [1936].

5. Согласно экспериментальным данным [Корнфельд, 1951 и др.], реальные жидкости способны выдерживать без нарушения сплошности некоторые отрицательные давления $-\bar{p}$.

Там же для обычной водопроводной воды приводится

$$\bar{p} \approx 20\ кГ/см^2. \tag{23}$$

С учетом этого условие (17) перепишется в виде

$$p = -\bar{p}, \tag{24}$$

что после подстановки в (12) дает

$$L_{кр}(t) = \frac{p_* + \bar{p}}{\rho u_*'}. \tag{25}$$

6. Для частного, но очень важного случая синусоидального закона истечения

$$u_*(t) = u_0 + u_a \sin \omega t \quad (u_a < u_0) \tag{26}$$

будем из (25) и (26) иметь (при $p_* = p_a$)

$$L_{кр} = \frac{p_a + \bar{p}}{\rho \omega u_a \cos \omega t}. \tag{27}$$

Отсюда

$$L = \frac{p_a + \bar{p}}{\rho \omega u_a}. \tag{28}$$

7. Проведенная нами сверхскоростная (100 000 кадров в секунду) киносъемка высоконапорных, пульсирующих с частотой $\nu = 17\ сек^{-1}$ струй, дала возможность экспериментально определить все величины, входящие в соотношение (28), что позволяет сопоставить теоретические результаты с опытом

$$\left.\begin{array}{c} u_a \approx 20\ м/сек, \\ \omega = 2\pi\nu = 6{,}28 \cdot 17\ рад/сек, \\ \bar{p} \approx 20\ кГ/см^2. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Подстановка (29) в (28) дает

$$L \approx 100\ см, \tag{30}$$

что весьма близко к среднему результату, найденному для таких струй статистической обработкой экспериментальных данных.

Хорошее совпадение получается и с экспериментом, описанным в работе Г. С. Лазарева [1966], где автор сообщает насадку, вынужденные продольные колебания и фиксирует процесс распада методом электроискровой фотографии (погрешность $\approx 10\%$).

Вводя в (28) вместо плотности ρ удельный вес γ, получим

$$L = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p_a + \bar{p}}{\gamma}, \tag{31}$$

где $\beta = \frac{\omega u_a}{g}$ — безразмерный параметр, характеризующий «степень нестационарности» скорости истечения струи. Поскольку множитель $\frac{p_a + \bar{p}}{\gamma}$ для струй данной жидкости (γ, $\bar{p}$) при неизменном противодавлении p_a есть величина постоянная, то полученный результат (31) можно сформулировать так: **длина связного участка струи обратно пропорциональна степени нестационарности скорости ее истечения.**

ЛИТЕРАТУРА

Бриль В. Я. Некоторые вопросы распада незатопленных струй. Зап. ЛГИ, т. XLIII, вып. 3, 1964.

Журавский А. М. Основные задачи теории разрушения угля струей воды. Зап. ЛГИ, т. XLI, вып. 1, 1959.

Корнфельд М. Упругость и прочность жидкости. ГИТТЛ, 1951.

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948.

Лазарев Г. С. Влияние вынужденных колебаний на распад струи. Изв. вузов, Машиностроение, № 6, 1966.

Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.

Ли Д. У., Спенсер Р. Доклад № 454, NaCA. В сб. Двигатели внутреннего сгорания, ОНТИ, 1936.

Рэлей Д. В. Теория звука, т. 2. Гостехиздат, 1955.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. ГИТТЛ, 1951.

Weber C. Z. Angew. Math. und Mech. Bd II, H2, 1932.