

УДК 531.3 : 546.126

ДИНАМИЧЕСКОЕ УПРУГОЕ ПОЛЕ В УСТУПЕ ПРИ ВЗРЫВЕ УДЛИНЕННОГО ЗАРЯДА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ДЕТОНАЦИИ

Д. Н. Климова, К. И. Огурцов

Рассмотрим динамическое упругое поле при взрыве удлиненного заряда, параллельного одной из обнаженных поверхностей уступа горного массива. Математически такое воздействие достаточно точно может быть описано прямыми и отраженными от обнаженных поверхностей возмущениями, вызываемыми движущимся со скоростью детонации источником типа центра расширения.

Для решения этой динамической задачи теории упругости используем интегральные преобразования и принцип наложения элементарных решений [Марчук, Огурцов, Петрашень, 1950; Огурцов, Петрашень, 1951; Петрашень, 1956; Огурцов, 1956]. Получим формулы, позволяющие рассчитывать значения напряжений, смещений, скоростей смещений и деформаций при взрыве в уступе.

Динамическое упругое поле, образованное удлиненным зарядом, расположенным в шпуре, складывается из прямых волн в безграничном массиве и волн, отразившихся от обнаженной поверхности уступа.

Построим решение для безграничной среды.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z . Рассмотрим элементарное решение, соответствующее мгновенному импульсу типа центра расширения в точке $r = 0, z = h_2$ заряда, расположенного на интервале $h_1 \leq z \leq h_2$ (рис. 1, а). Волновая картина, очевидно, не зависит от угла θ , и волновое поле будет осесимметричным.

Представленное продольным потенциалом Φ решение позволяет выразить горизонтальные q и вертикальные W смещения по формулам

$$q = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad W = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1)$$

а напряжения согласно обобщенному закону Гука будут

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \lambda \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_\theta &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \tau_{rz} &= 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ и μ — упругие постоянные Лямэ.

Сама потенциальная функция φ запишется в виде [Огурцов, Петрашень, 1951]

$$\varphi = -\frac{\gamma^2 P d}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - h_2)^2}} \delta\left(t - \frac{\sqrt{r^2 + (z - h_2)^2}}{a}\right), \quad (3)$$

где t — время; δ — разрывная функция Дирака; γ — отношение скорости распространения поперечных волн b к скорости распространения продольных волн a , $\gamma = b/a = \sqrt{\mu/(\lambda + 2\mu)}$; $Pd = \text{const}$ — момент диполей в соответствующем кельвиновском статистическом решении задачи для центра расширения [Тимошенко, 1937] (сколь угодно большое значение силы P умножается на обратно пропорциональное ей сколь угодно малое расстояние d между двумя противоположно направленными силами, образующими диполь). Заметим, что (3), а следовательно, и формулы (1) и (2) имеют бесконечные разрывы типа δ -функции и ее производных на фронте продольной волны

$$(at)^2 - r^2 - (z - h_2)^2 = 0. \quad (4)$$

Однако для простоты и краткости математических выкладок удобнее оперировать именно с этой (обобщенной) δ -функцией. При переходе же в окончательных формулах к физически реальным зависимостям действия источника во времени (применяя интеграл свертки) разрывы исчезают.

Очевидно, что детонацию можно рассматривать как последовательность взрывов через бесконечно

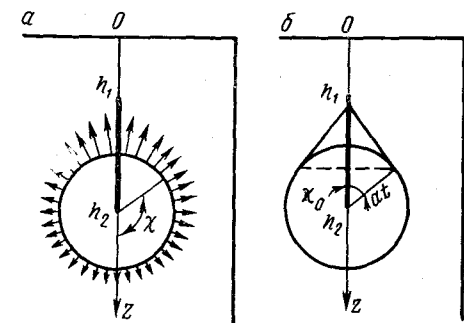


Рис. 1. Волновая картина в массиве в начальные моменты времени при скорости детонации, меньшей (а) и большей (б) скорости распространения продольной волны.

малые промежутки времени $d\tau$ элементарных зарядов $\frac{PdVd\tau}{l}$ в точках $z = h_2, h_2 - Vd\tau, h_2 - 2Vd\tau \dots$, где V — скорость детонации, а l — некоторая величина, имеющая размерность длины (например, длина всего заряда $h_2 - h_1$). При этом можно искать пока решения для заряда, простирающегося вверх от точки $r = 0, z = h_2$ до бесконечности. Решение, соответствующее заряду конечной длины $h_2 - h_1$, получится в результате прибавления с обратным знаком аналогичного решения для заряда, простирающегося вверх от точки $r = 0, z = h_1$ до бесконечности и инициируемого в момент $t = \frac{h_2 - h_1}{V}$, когда детонация от точки $r = 0, z = h_2$ пройдет путь $h_2 - h_1$.

Решение, соответствующее элементарному заряду, взорванному в момент τ в точке $z = h_2 - V\tau$, согласно формуле (3) имеет вид

$$\varphi_\tau = -\frac{\gamma^2 P d V d\tau}{4\pi\mu l} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + [z - (h_2 - V\tau)]^2}} \delta\left(t - \tau - \frac{\sqrt{r^2 + [z - (h_2 - V\tau)]^2}}{a}\right). \quad (5)$$

Суммарное решение будет выражаться интегралом

$$\varphi = -\frac{\gamma^2 P d V}{4\pi\mu l} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r^2 + [z - (h_2 - V\tau)]^2}} \delta\left(t - \tau - \frac{\sqrt{r^2 + [z - (h_2 - V\tau)]^2}}{a}\right) d\tau. \quad (6)$$

Потенциал (6) вычисляем, используя правила интегрирования выражений, содержащих δ -функцию, зависящую от сложного аргумента. Для этого необходимо найти значения τ , при которых этот аргумент обращается в нуль:

$$t - \tau - \frac{\sqrt{r^2 + [z - (h_2 - V\tau)]^2}}{a} = 0. \quad (7)$$

Корни уравнения (7) будут

$$\begin{aligned}\tau_+ &= \frac{a^2 t + V(z - h_2) + \sqrt{[a^2 t + V(z - h_2)]^2 - (a^2 - V^2)[a^2 t^2 - r^2 - (z - h_2)]^2}}{a^2 - V^2}, \\ \tau_- &= \frac{a^2 t + V(z - h_2) - \sqrt{[a^2 t + V(z - h_2)]^2 - (a^2 - V^2)[a^2 t^2 - r^2 - (z - h_2)]^2}}{a^2 - V^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Рассмотрим сначала случай, когда скорость детонации меньше скорости распространения продольных волн $V < a$. Позади сферического фронта $a^2 t^2 \geq r^2 + (z - h_2)^2$ (впереди фронта при таких V среда находится в покое) в промежутке 0, t уравнению (7) удовлетворяет корень τ_- . Следовательно, значение потенциала (6) будет выражаться следующей конечной формулой

$$\Phi = \frac{-\gamma^2 P d}{4\pi \mu l} \cdot \frac{aV}{[a^2(t - \tau_-) + V[z - (h_2 - V\tau_-)]]}. \quad (9)$$

На фронте сферической волны (4) корень τ_- обращается в нуль и формула (9) определяет скачок, принимающий следующее значение при переходе фронта через точку наблюдения:

$$\Phi_1 = -\frac{\gamma^2 P d}{4\pi \mu l} \cdot \frac{aV}{a^2 t + V(z - h_2)} = -\frac{\gamma^2 P d}{\pi l} \cdot \frac{V}{\sqrt{r^2 + (z - h_2)^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V}{a} \cos \chi}, \quad (10)$$

где χ — угол между положительным направлением оси z и направлением луча, проведенного из точки $r = 0$, $z = h_2$ в произвольную точку фронта r , z (рис. 1, a).

Если скачок (10) считать главной частью волнового поля, что справедливо на достаточно больших расстояниях по сравнению с радиусом цилиндрического заряда и при достаточно малой длительности действия физически реального (непрерывного с двумя первыми производными) источника $F(t)$, то потенциал (9) приближенно будет оцениваться формулой

$$\Phi \approx \int_{t_a}^t \Phi_1 H(\tau - t_a) F(t - \tau) d\tau = \Phi_1 \int_{t_a}^t F(t - \tau) d\tau, \quad (11)$$

где

$$t_a = \frac{\sqrt{r^2 + (z - h_2)^2}}{a}. \quad (12)$$

Тогда смещения согласно формуле (1) будут определяться равенствами

$$q = \frac{-1}{a} \Phi_1 F(t - t_a) \sin \chi, \quad W = \frac{-1}{a} \Phi_1 F(t - t_a) \cos \chi. \quad (13)$$

По этим формулам нетрудно выполнять расчеты поля смещений. На рис. 1, a стрелками изображены направления и относительные величины полного вектора смещений при значении $V = \frac{1}{2} a$. Зависимость смещений от времени описывается согласно формуле (13) функцией $F(t - t_a)$. Расчеты показывают, что поля смещений наиболее интенсивны по направлению детонации. Когда скорость детонации V приближается к скорости распространения продольных волн a , то в окрестности оси z на фронте волны смещения неограниченно возрастают. Здесь, очевидно, нельзя характеризовать волновое поле только разрывом на фронте. Необходимо еще оценивать поле позади фронта согласно точной формуле для потенциала (9) и соответствующих ему смещений (1). Аналогично предыдущему можно рассчитать напряжения (2), по которым легко получить главные напряжения.

Пусть скорость детонации больше скорости распространения продольных волн ($V > a$). Тогда, очевидно, волновое поле (6) будет отличным от нуля не только позади сферического фронта (4), но и в некоторой области впереди него.

В области позади фронта сферической волны решение задачи по-прежнему определяется формулой (9). Однако τ_- теперь обращается в нуль не на всем сферическом фронте, а лишь при $z > h_2 - at \cos \chi_0$, где $\chi_0 = \arccos \frac{a}{V}$.

На сферическом фронте выше пунктирной линии, изображенной на рис. 1, б (при $z < h_2 - at \cos \chi_0$), τ_- принимает значение, которое при подстановке в формулу (9) приводит к выражению, отличному от (10),

$$\tau_- = \frac{2[(h_2 - z)V - a^2 t]}{V^2 - a^2}. \quad (14)$$

Впереди же сферического фронта оба корня (8) удовлетворяют уравнению (7), если выражение под радикалом не отрицательно

$$a^2 [Vt + (z - h_2)]^2 - (V^2 - a^2)r^2 \geq 0. \quad (15)$$

Условие (15) указывает, что отличное от нуля волновое поле должно быть заключено как раз

Рис. 2. Волновая картина в массиве при скорости детонации, меньшей (а) и большей (б) скорости распространения продольных волн.

внутри конуса, изображенного на рис. 1, б. Потенциал Φ , определяющий это поле, будет выражаться формулой

$$\Phi = - \frac{\gamma^2 P d a V}{4\pi \mu l} \left[\frac{1}{|a^2(t - \tau_-) + V[(z - h_2) - V\tau_-]|} + \frac{1}{|a^2(t - \tau_+) + V[z - (h_2 - V\tau_+)]|} \right]. \quad (16)$$

На коническом фронте, где (15) обращается в нуль, оказывается

$$\tau_- = \tau_+ = \frac{a^2 t + V(z - h_2)}{a^2 - V^2}. \quad (17)$$

Следовательно, потенциал (16) имеет бесконечный разрыв. На сферическом фронте $\tau_+ = 0$, а τ_- совпадает с (14). Потенциал (16) при этом принимает некоторое конечное значение, отличное от значения, полученного при приближении с противоположной стороны фронта. При этом в формуле (13) вместо Φ_1 следует брать разность потенциалов.

Если перейти к пределу $V \rightarrow \infty$, то асимптотические оценки корней τ_+ и τ_- выразятся формулой

$$\tau_{\pm} \approx \frac{h_2 - z \pm V \sqrt{(at)^2 - r^2}}{V}, \quad (18)$$

а потенциал будет стремиться к значению

$$\Phi = - \frac{\gamma^2 P d}{2\pi \mu l} \cdot \frac{a}{V \sqrt{(at)^2 - r^2}}. \quad (19)$$

Потенциал (19) до прихода в точку наблюдения сферической волны от точки $r = 0$, $z = h_2$ не зависит от z и определяет цилиндрическую волну, не содержащую вертикальных смещений. Смещения на фронте конической волны для источника $F(t)$ выражаются так же, как и на фронте цилиндрической волны [Климова, 1968].

До сих пор мы рассматривали линейные заряды, распространенные вдоль оси z от точки $r = 0$, $z = h_2$ вверх до $r = 0$, $z = -\infty$. Если заряд расположен на отрезке $h_2 \leq z \leq h_1$, то соответствующее ему решение получается

в виде суммы двух решений: рассмотренного ранее и взятого с обратным знаком решения, соответствующего заряду, простирающемуся от точки $z = h_1$ до точки $z = -\infty$.

Если $V < a$, то после достижения детонационной волной точки $z = h_1$ положение фронтов волн будет иметь вид, изображенный на рис. 2, а. Когда $V > a$, наблюдается волновая картина, изображенная на рис. 2, б. В первом случае сферические фронты волн никогда не будут налагаться друг на друга. Во втором случае в некоторый момент они начнут интерферировать друг с другом.

При получении динамического упругого поля, образованного отраженными волнами, решение для прямых волн удобно представить в интегральной форме [Огурцов, Петрашень, 1951]:

$$\Phi = - \frac{\gamma^2 b}{8\pi^2 \mu i l} \int_0^\infty \int_L \frac{e^{k[bt\zeta + (z-h_2)\alpha]}}{\alpha} k J_0(kr) d\zeta dk, \quad (20)$$

где $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$; J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; L — контур интегрирования ($\sigma - i\infty$, $\sigma + i\infty$, $\sigma > 0$) такой, что все особые точки расположены левее него.

Проводя операции, аналогичные предыдущим под знаком интегралов, получим решение для взрыва, распространяющегося вверх от точки $r = 0$, $z = h_2$ со скоростью детонации V .

$$\Phi = - \frac{\gamma^2 b P d V}{8\pi^2 \mu i l} \int_0^\infty \int_L \frac{1}{\alpha (b\zeta + V\alpha)} e^{k[bt\zeta + (z-h_2)\alpha]} J_0(kr) d\zeta dk. \quad (21)$$

Потенциал отраженной продольной волны [Огурцов, Петрашень, 1951]

$$\Phi_p = \frac{\gamma^2 b P d V}{8\pi^2 \mu i l} \int_0^\infty \int_L \frac{T(\zeta)}{R(\zeta) \alpha (b\zeta + V\alpha)} e^{k[bt\zeta - (z-h_2)\alpha]} J_0(kr) d\zeta dk, \quad (22)$$

а поперечной

$$\Psi_s = \frac{\gamma^2 b V P d}{8\pi^2 \mu i l} \int_0^\infty \int_L \frac{4g}{R(\zeta) (b\zeta + V\alpha)} e^{k[bt\zeta - h_2\alpha - z\beta]} J_1(kr) d\zeta dk, \quad (23)$$

где $g = 2 + \zeta^2$; $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$; $\beta = \sqrt{1 + \zeta^2}$;

$$R(\zeta) = g^2 - 4\alpha\beta; \quad T(\zeta) = g^2 + 4\alpha\beta. \quad (24)$$

Применяя метод стационарной фазы и интеграл свертки для главной части волнового поля, получим формулу, аналогичную выражению (11),

$$\Phi_p = \frac{\gamma^2 b V P d}{4\pi \mu l} \operatorname{Re} \frac{T(\zeta_1) |\zeta_1|}{R(\zeta_1) (b|\zeta_1| + V|\alpha|)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h_2)^2}} \int_{t_p}^t F(t-\tau) d\tau, \quad (25)$$

где

$$\zeta_1 = \frac{i}{\gamma \sin \theta_p}; \quad t_p = \frac{\sqrt{r^2 + (z+h_2)^2}}{a}; \quad (26)$$

θ_p — угол падения продольной волны.

Для отраженной поперечной волны аналогично определяем

$$\psi_s = -\frac{\gamma^2 b V P d}{4\pi\mu l} \operatorname{Re} \frac{4g}{R(\xi_1)(b|\xi_1| + V|a|)} \cdot \frac{\gamma^{-1} r^{-0.5}}{\sqrt{h_2 \operatorname{tg}^3 \theta_p + \frac{\gamma \sin^3 \theta_p z}{(1-\gamma^2 \sin^2 \theta_p)^{3/2}}}} \times \\ \times \int_{t_s}^t F(t-\tau) d\tau, \quad (27)$$

где

$$t_s = \frac{r}{a} \sin \theta_p + \frac{z}{b} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \theta_p} + \frac{h_2}{a} \cos \theta_p. \quad (28)$$

Дифференцируя Φ_p как сложную функцию t_p , можно получить согласно формулам (1) и (2) компоненты смещения и напряжения, образованные отраженной продольной волной. По соответствующим формулам [Огурцов, Петрашень, 1951], которые здесь не приводятся, аналогично оцениваются компоненты смещений и напряжений на фронте поперечной волны.

Кроме известных особых точек ветвления и полюсов [Огурцов, Петрашень, 1951], подынтегральные выражения наших точных решений (22) и (23) имеют еще дополнительные полюсы (рис. 3)

$$\xi_2 = \frac{iV}{\gamma \sqrt{V^2 - a^2}}, \quad \xi_3 = -\frac{iV}{\gamma \sqrt{V^2 - a^2}}, \quad (29)$$

являющиеся корнями уравнения

$$b\xi + Va = 0. \quad (30)$$

Рис. 3. Расположение особых точек.

Часть волнового поля, определенная по вычетам в этих полюсах, соответствует отраженным коническим волнам и выражается следующей формулой для продольных волн:

$$\Phi_k = \frac{\gamma^2 P d V}{2\pi\mu l} \cdot \frac{T(\xi_1)}{R(\xi_1)} \cdot \frac{a^2}{V^2 + a^2} \cdot \frac{(V^2 - a^2)^{1/2}}{\sqrt{a^2 [Vt + (z - h_2)]^2 - r^2 (V^2 - a^2)}}. \quad (31)$$

Для поперечных волн

$$\psi_k = \frac{\gamma^2 P d V}{2\pi\mu l} \cdot \frac{4g}{R(\xi_1)} \cdot \frac{a^2}{V^2 + a^2} \cdot \frac{1}{r} \left[1 + \right. \\ \left. + \frac{a(Vt + h_2) + z\gamma^{-1} \sqrt{(1-\gamma^2)V^2 + b^2}}{\sqrt{[a(Vt + h_2) + z\gamma^{-1} \sqrt{(1-\gamma^2)V^2 + b^2}]^2 - r^2 (V^2 - a^2)}} \right]. \quad (32)$$

На фронтах отраженной продольной и поперечной конических волн эти формулы дают разрывы второго рода, так как выражения под радикалами обращаются в нуль. Нетрудно убедиться, что оставшаяся часть волнового поля, соответствующая интегрированию вокруг разрезов и других особых точек, не содержит подобных разрывов.

Если $V < a$, лишь один корень

$$\xi_0 = -\frac{V}{\gamma \sqrt{V^2 - a^2}} \quad (33)$$

удовлетворяет уравнению (30) и соответствующие ему потенциалы имеют вид

$$\Phi_k = \frac{\gamma^2 V P d}{4\pi\mu l} \cdot \frac{T(\xi_1)}{R(\xi_1)\alpha(\xi_1)} \cdot \frac{a^2}{a^2 - V^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{a^2 - V^2} [Vt + (z + h_2)]^2}}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Psi_k = & \frac{\gamma^2 V P d}{4\pi\mu l} \cdot \frac{4g(\xi_1)}{R(\xi_1)} \cdot \frac{a^2}{a^2 - V^2} \cdot \frac{1}{r} \left[1 + \right. \\ & \left. + \frac{a(Vt + h_2) + \frac{z}{b} \sqrt{(1 - \gamma^2)V^2 - b^2}}{\sqrt{r^2(a^2 - V^2) + a^2 \left[(Vt + h_2) + \frac{z}{b} \sqrt{(1 - \gamma^2)V^2 - b^2} \right]^2}} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Эти части волнового поля относятся только к полю позади фронтов объемных волн и не содержат разрывов.

Точное волновое поле отраженных объемных и конических волн можно вычислить, приводя решения (21) — (23) к вещественным интегралам. Эти решения можно также выразить компактными формулами, подобными формулам В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [Огурцов, Петрашень, 1951]. Подставим в (22) и (23) вместо функций Бесселя их интегральные представления

$$\begin{aligned} J_0(kr) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kr \cos \lambda) d\lambda, \\ J_1(kr) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \lambda \sin(kr \cos \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (36)$$

После перестановки порядка интегрирования и вычисления интегралов по k и ζ формулы (22) и (23) приведем к виду

$$\Phi_p = \frac{\gamma^2 b V P d}{4\pi^2 \mu l} \operatorname{Re} \int_0^\pi \left[\frac{T(\zeta)}{R(\zeta)\alpha(b\zeta + V\alpha)} \cdot \frac{1}{\Delta'_a(\zeta)} \right]_{\zeta=\zeta_a} d\lambda, \quad (37)$$

$$\Psi_s = \frac{-\gamma^2 b V P d}{4\pi^2 \mu l} \operatorname{Im} \int_0^\pi \left[\frac{4g}{R(\zeta)(b\zeta + V\alpha)} \cdot \frac{1}{\Delta'_b(\zeta)} \right]_{\zeta=\zeta_b} \cos \lambda d\lambda, \quad (38)$$

где ζ_a и ζ_b — корни уравнений.

$$\Delta_a = bt\zeta - (z + h_2)\alpha - ix = 0; \quad \Delta_b = bt\zeta - h_2\alpha - z\beta - ix = 0. \quad (39)$$

Заметим, что учет волн от боковой поверхности уступа при таком представлении решений возможен только приближенно, например на основе лучевого метода.

ЛИТЕРАТУРА

Климова Д. Н. Анализ волнового поля, возникающего в устье при взрыве колонкового заряда. Тр. III симпозиума по распространению упругих и упруго-пластических волн. Изд-во АН УзССР, 1968.

Марчук Г. И., Огурцов К. И., Петрашень Г. И. О задаче Лэмба в случае полупространства. Уч. зап. ЛГУ, № 135, 1950.

Огурцов К. И. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий. Уч. зап. ЛГУ, № 208, 1956.

Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, № 149, 1951.

Петрашень Г. И. О рациональном методе решения задач динамической теории упругости в случае слоисто-изотропных областей с плоско-параллельными границами. Уч. зап. ЛГУ, № 208, 1956.

Тимошенко С. П. Теория упругости. Изд-во ОНТИ, 1937.