Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 513.13

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ИНЕРЦИОННОЙ КОНУСНОЙ ДРОБИЛКИ

Ю. И. Северов

Рассматривается движение системы, состоящей из двух твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки и имеющих общую геометрическую ось собственных вращений. Нами изучается безотрывное обкатывание первого тела системы по внутренней конической поверхности неподвижного тела (чаши). Такое движение соответствует рабочему и холостому режиму дробилки. Вследствие трудностей, возникающих при исследовании движения системы твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки, при постановке задачи приходится вводить ряд ограничений. Для предельного случая составлены дифференциальные уравнения движения каждого тела системы в отдельности и системы в целом.

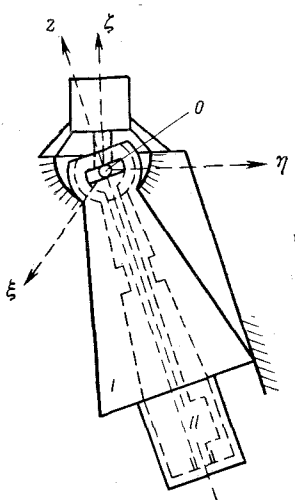


Рис. 1. Схематический вид инерционной конусной дробилки.
ξ, η, ζ — неподвижная система декартовых осей координат; z — общая геометрическая ось собственных вращений тел *I*—*II*.

Рассмотрим систему двух тел (рис. 1), состоящую из конуса *I* и дебаланса *II*. Конус совершает сложное движение вокруг неподвижной точки O, где установлен сферический шарнир. Конус закреплен на пустотелом валу, в котором вращается в подшипниках, связанных с конусом, дебаланс. Геометрические оси собственных вращений *I* и *II* тел совпадают. Верхний конец вала дебаланса соединен с ведомой вилкой шарнира Кардана — Гука. Ведущая вилка последнего имеет специальное (шлицевое) соединение с вертикальным валом ротора мотора, статор которого неподвижно установлен на корпусе дробилки. Центр шарнира Кардана — Гука, как и сферического, совпадает с неподвижной точкой O. Система движется под действием сил тяжести тел и вращающего момента электродвигателя, который передается шарниром Кардана — Гука телу *II*. Конус считается динамически симметричным телом вращения. Тело *II* динамически несимметрично, но имеет плоскость материальной симметрии, проходящую через ось собственного вращения.

Проведем при некоторых упрощающих предположениях исследование движения системы в том случае, когда подвижный конус катится без скольжения по неподвижной опоре — конусу. Положение системы в пространстве в рассматриваемой задаче определим с помощью углов Эйлера ψ, β, ϑ и γ, где ψ означает угол прецессии системы, ϑ — угол нутации, а β и γ углы собственных вращений соответственно тел *II* и *I*.

Угол γ благодаря условию качения без скольжения тела *I* по неподвижной опоре выражается через угол ψ. Связь эта голономна, что следует из формулы

$$\dot{\gamma} = -\frac{l_1}{l_2}\dot{\psi}, \qquad (1)$$

где l_1 и l_2 — постоянные расстояния точки касания подвижного и неподвижного конусов соответственно от осей ζ и z.

Согласно постановке задачи

$$\vartheta = \text{const}, \tag{2}$$

что является уравнением второй голономной связи. В качестве обобщенных координат примем параметры ψ и β.

Кроме двух голономных связей на систему наложена еще неголономная связь, осуществляемая шарниром Кардана — Гука. Уравнение этой связи, выведенное ранее *

$$f(\vartheta, \psi, \psi', \omega, \dot{\psi}, \dot{\beta}) = 0, \tag{3}$$

где $f(\vartheta, \psi, \psi', \omega, \dot{\psi}, \dot{\beta}) = (\omega - \dot{\psi})\cos\vartheta - \dot{\beta}\,[1 - \sin^2(\psi - \psi')\sin^2\vartheta]$; ψ', ω — угол поворота и угловая скорость вала двигателя.

Считая неголономную связь идеальной, составим для движения системы уравнения Фереpса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}, \qquad (q_1 = \psi;\ q_2 = \beta),$$

где λ — некоторый коэффициент; Q_i — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i; T — кинетическая энергия системы.

При сделанных предположениях будем иметь следующие дифференциальные уравнения движения системы [Северов, 1964]:

$$(a_1 + A_2\sin^2\vartheta\sin^2\beta + B_2\sin^2\vartheta\cos^2\beta - 2G\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta)\ddot{\psi} +$$

$$+ 2\,[(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cos\beta + G\cos\vartheta]\sin\vartheta\sin\beta\dot{\psi}\dot{\beta} +$$

$$+ (C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta)\ddot{\beta} + G\sin\vartheta\sin\beta\dot{\beta}^2 = M - \frac{l_1 - l_2\cos\vartheta}{l_2}M_c - \lambda\cos\vartheta, \tag{4}$$

$$(C_2\cos\vartheta - G\sin\vartheta\cos\beta)\ddot{\psi} + C_2\ddot{\beta} - [(A_2 - B_2)\sin\vartheta\cos\beta + G\cos\vartheta]\sin\vartheta\sin\beta\dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{\cos\vartheta}{1 - \cos^2\beta\sin^2\vartheta}M - \mu P_2\sin\vartheta\sin\beta - \lambda\,[1 - \sin^2(\psi - \psi')\sin^2\vartheta],$$

где $a_1 = A_1\sin^2\vartheta + C_1\left(\cos\vartheta - \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + C_2\cos\vartheta$; $A_1 = B_1$, C_1 — моменты инерции тела I относительно осей x_1, y_1, z; A_2, B_2, C_2 — моменты инерции тела II относительно осей x_2, y_2, z; G — центробежный момент инерции тела II относительно осей Oy_2 и Oz; μ — расстояние центра тяжести тела II от оси собственного вращения; P_2 — вес тела II; M — вращающий момент двигателя; M_c — обобщенный момент полезного сопротивления.

Уравнения (4) должны рассматриваться совместно с уравнением неголономной связи (3)

$$(\omega - \dot{\psi})\cos\vartheta - [1 - \sin^2(\psi - \psi')\sin^2\vartheta]\,\dot{\beta} = 0.$$

В имеющихся трех уравнениях содержится пять неизвестных величин: параметры ψ и β, коэффициент λ, угловая скорость ротора двигателя ω ** и момент полезного сопротивления M_c. Наличие последнего связано с тем, что соответствующая связь не идеальна и при составлении уравнений Фереpса ее реакцию следует перевести в разряд задаваемых сил. Вращающий момент электродвигателя M считается известной функцией ω.

---

* Ю. И. Северов. Основные уравнения приближенной теории инерционных дробилок. Зап. ЛГИ, т. XLIV, вып. 3, 1964.

** Угол поворота ротора ψ' выражается через угловую скорость ротора ω.

Уравнения движения дробилки в другой форме и без учета влияния шарнира Кардана — Гука составлены раньше И. И. Блехманом и А. К. Рундквистом *. В тех же работах исследовано решение системы в первом приближении.

Чтобы число уравнений привести в соответствие с числом неизвестных величин, расчленим систему тел и составим уравнения движения каждого тела в отдельности. При этом для упрощения исследования перейдем к рассмотрению предельного случая движения системы, для чего переместим на «бесконечность» вверх по вертикали центр подвеса конуса ($\vartheta \to 0$, $l_1 = \text{const}$).

При указанных условиях система тел будет совершать плоское горизонтальное движение. Вместо пространственной системы сил, приложенных к дробилке, можно рассматривать плоскую (силы тяжести тел системы уравновешиваются вертикальными составляющими реакций, а горизонтальные реакции для каждого тела суммируются). Ось собственных вращений тел

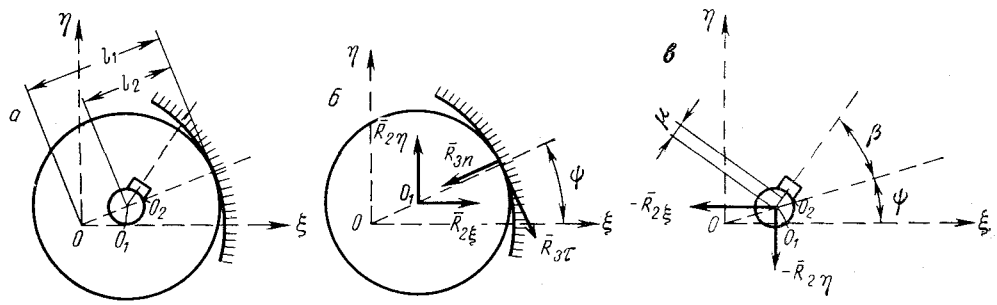


Рис. 2. Проекции на горизонтальную плоскость: *а* — системы тел; *б* — тела *I*; *в* — тела *II*.

становится параллельной оси прецессии (оси дробилки). Если спроектировать тела на неподвижную горизонтальную плоскость, то получим картину, схематически изображенную на рис. 2, *а*, где несущественные детали опущены.

Составим уравнения плоского движения каждого из тел системы в отдельности, пренебрегая внутренними моментами сопротивления и считая сферический шарнир и шарнир Кардана — Гука идеальными. Кроме того, используем передаточные отношения угловых скоростей и моментов сил в шарнире Кардана — Гука при подвижном ведомом вале **.

Рассмотрим движение тела *I* системы (рис. 2, *б*), которое считается динамически симметричным. Его центр масс расположен на оси O_1 (положение оси z в предельном случае). Проведя неподвижные координатные оси ξ и η через точку O (проекция оси ζ дробилки на горизонтальную плоскость), можем написать следующие уравнения плоского движения первого тела:

$$\begin{aligned} -m_1 \nu (\sin\psi\ddot{\psi} + \cos\psi\dot{\psi}^2) &= R_{2\xi} + \sin\psi R_{3\tau} - \cos\psi R_{3n}, \\ m_1 \nu (\cos\psi\ddot{\psi} - \sin\psi\dot{\psi}^2) &= R_{2\eta} - \cos\psi R_{3\tau} - \sin\psi R_{3n}, \\ I_{1O_1} \frac{\nu}{l_2} \ddot{\psi} &= -f_k R_{3n} + l_2 R_{3\tau}, \end{aligned} \tag{5}$$

где m_1 — масса тела *I*; I_{1O_1} — момент инерции тела *I* относительно оси O_1; $\nu = OO_1 = l_1 - l_2$; $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$ — проекции на оси ξ и η главного вектора горизонтальных реакций тела *II* на *I*; $R_{3\tau}$, R_{3n} — касательная и нормальная составляющие реакции дробимого материала (или при холостом ходе —

* А. К. Рундквист. Механика инерционной дробилки Механобра. В сб. Механика и расчет машин вибрационного типа. Изд-во АН СССР, 1957.

** Ю. И. Северов. Основные уравнения приближенной теории инерционных дробилок. Зап. ЛГИ, т. XLIV, вып. 3, 1964.

соответствующие реакции неподвижного конуса); f_k — коэффициент, имеющий размерность длины и определяемый опытным путем; при холостом ходе f_k — коэффициент трения качения (перекатывания) тела I.

Рассмотрим движение тела II системы (рис. 2, *в*), которое динамически несимметрично, но обладает плоскостью материальной симметрии, проекция которой проходит по линии O_1O_2. Точка O_2 — проекция на горизонтальную плоскость центра масс тела II. Замечая, что в данном случае угол, характеризующий «абсолютное» вращение тела II, равен $\psi + \beta$ (см. рис. 2, *в*), напишем следующие уравнения плоского движения второго тела:

$$m_2\{[\nu\sin\psi + \mu\sin(\psi+\beta)]\ddot{\psi} + \mu\sin(\psi+\beta)\ddot{\beta} +$$
$$+ [\nu\cos\psi + \mu\cos(\psi+\beta)]\dot{\psi}^2 + 2\mu\cos(\psi+\beta)\dot{\psi}\dot{\beta} + \mu\cos(\psi+\beta)\dot{\beta}^2\} = R_{2\xi},$$
$$m_2\{[\nu\cos\psi + \mu\cos(\psi+\beta)]\ddot{\psi} + \mu\cos(\psi+\beta)\ddot{\beta} - [\nu\sin\psi + \mu\sin(\psi+\beta)]\dot{\psi}^2 -$$
$$- 2\mu\sin(\psi+\beta)\dot{\psi}\dot{\beta} - \mu\sin(\psi+\beta)\dot{\beta}^2\} = -R_{2\eta}, \qquad (6)$$
$$(I_{2O_1} - m_2\mu^2)(\ddot{\psi}+\ddot{\beta}) = M - \mu\sin(\psi+\beta)R_{2\xi} + \mu\cos(\psi+\beta)R_{2\eta},$$

где m_2 — масса тела II; I_{2O_1} — момент инерции тела II относительно оси O_1; $\mu = O_1O_2$ — смещение центра масс тела II от оси собственного вращения тел системы.

Для движения системы тел в рассматриваемом случае получена совокупность шести уравнений (5) и (6), содержащая шесть неизвестных величин — ψ, β, $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\tau}$, R_{3n}. Для их теоретического определения из уравнений (6) исключим реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$. Получим дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные ψ и β,

$$(I_{2O_1} + m_2\mu\nu\cos\beta)\ddot{\psi} + I_{2O_1}\ddot{\beta} + m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}^2 = M. \qquad (7)$$

Второе уравнение, содержащее те же неизвестные, получается из уравнений (5) и (6) после исключения всех реакций $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\tau}$, R_{3n}:

$$\left[a_1\nu + m_2\mu\left(\frac{f_k}{l_2}\sin\beta + \cos\beta\right)\right]\ddot{\psi} + m_2\mu\left(\frac{f_k}{l_2}\sin\beta + \cos\beta\right)\ddot{\beta} +$$
$$+ \left[b_1\nu\frac{f_k}{l_2} + m_2\mu\left(\frac{f_k}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\right]\dot{\psi}^2 + 2m_2\mu\left(\frac{f_k}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\dot{\psi}\dot{\beta} + \qquad (8)$$
$$+ m_2\mu\left(\frac{f_k}{l_2}\cos\beta - \sin\beta\right)\dot{\beta}^2 = 0,$$

где $a_1 = m_1 + m_2 + I_{1O_1}\frac{1}{l_2^2}$; $b_1 = m_1 + m_2$ — масса системы.

Уравнение (7) представляет, как в этом можно убедиться, уравнение Лагранжа II рода, составленное относительно параметра β. Второе уравнение Лагранжа, составленное относительно параметра ψ, будет содержать момент сопротивления M_c, а значит, неизвестную реакцию R_{3n}, так как эту силу при составлении уравнений Лагранжа придется условно отнести в разряд задаваемых сил. Предполагая, что из уравнений (7) и (8) найдены как функции времени параметры ψ и β, из уравнений (6) определим реакции $R_{2\xi}$ и $R_{2\eta}$, а из уравнений (5) — реакции $R_{3\tau}$ и R_{3n}. Решение всей совокупности уравнений принципиально зависит от решения системы лишь двух уравнений (7) и (8).

Установившееся движение является важнейшим режимом работы дробилки. Поэтому необходимо исследовать возможность движения рассматриваемой системы при условии постоянства угловых скоростей прецессии (вращение тел вокруг оси дробилки) и собственных вращений тел.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (7) и (8). Считаем, как это обычно полагают на практике, что

$$M = \frac{N}{\omega}, \tag{9}$$

где N — мощность двигателя.

Имея в виду установившиеся движения системы, выясним, допускают ли уравнения (7) и (8) частичные решения вида $\dot{\psi} = \text{const}$, $\dot{\beta} = \text{const}$.

Из этих решений рассмотрим семейство

$$\dot{\psi} = \text{const}, \quad \beta = \text{const}. \tag{10}$$

При условиях (10) уравнения (7) и (8) дают

$$m_2 \mu \nu \sin \beta \dot{\psi}^2 = M,$$

$$\left[b_1 \nu \frac{f_k}{l_2} + m_2 \mu \left(\frac{f_k}{l_2} \cos \beta - \sin \beta \right) \right] \dot{\psi}^2 = 0, \tag{11}$$

а равенство (9)

$$M = \frac{N}{\dot{\psi}}. \tag{12}$$

При установившемся движении $\dot{\psi} \neq 0$, тогда из второго уравнения (11) следует

$$b_1 \nu \frac{f_k}{l_2} + m_2 \mu \left(\frac{f_k}{l_2} \cos \beta - \sin \beta \right) = 0. \tag{13}$$

Это уравнение определяет возможные значения β рассматриваемого семейства решений (10). Значения $\dot{\psi}$ того же семейства определяются первым уравнением из (11) и равенством (12)

$$\dot{\psi} = \sqrt[3]{\frac{N}{m_2 \mu \nu \sin \beta}}. \tag{14}$$

Угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$, очевидно, не может быть неограниченной, а тогда из (14) следует, что $\sin \beta \neq 0$,

т. е.

$$\beta \neq \pm n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Поскольку по условию $\dot{\psi} = \text{const}$,

$$\psi = \dot{\psi} t + \psi_0. \tag{16}$$

Возможные постоянные значения β определяются уравнением (13), из которого следует, что значения β будут действительными при условии

$$m_2^2 \mu^2 l_2^2 - (b_1^2 \nu^2 - m_2^2 \mu^2) f_k^2 \geqslant 0. \tag{17}$$

Последнее заведомо выполняется, если $b_1^2 \nu^2 - m_2^2 \mu^2 \leqslant 0$ или $b_1 \nu - m_2 \mu \leqslant 0$, так как b_1, ν, m_2, $\mu > 0$.

В зависимости от соотношений между параметрами b_1, m_2, μ и ν, f_k из уравнения (13) получаем четыре возможных постоянных значения β и, следовательно, четыре частных решения рассматриваемого семейства (10)

$$\dot{\psi}_1 = \sqrt[3]{\frac{N_1}{m_2 \mu \nu \sin \beta_1}},$$

$$\beta_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{m_2 \mu l_2 + \sqrt{m_2^2 \mu^2 l_2^2 - (b_1^2 \nu^2 - m_2^2 \mu^2) f_k^2}}{(b_1 \nu - m_2 \mu) f_k}; \tag{18}$$

$$\begin{cases} \psi_2 = \sqrt[3]{\dfrac{N_2}{m_2\mu\nu\sin\beta_2}}, \\ \beta_2 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{m_2\mu l_2 - \sqrt{m_2^2\mu^2 l_2^2 - (b_1^2\nu^2 - m_2^2\mu^2) f_k^2}}{(b_1\nu - m_2\mu) f_k}; \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_3 = \sqrt[3]{\dfrac{N_3}{m_2\mu\nu\sin\beta_3}}, \\ \beta_3 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{m_2\mu l_2}{(b_1\nu - m_2\mu) f_k}; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_4 = \sqrt[3]{\dfrac{N_4}{m_2\mu\nu\sin\beta_4}}, \\ \beta_4 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{f_k}{l_2}. \end{cases} \tag{21}$$

Решения (18) и (19) получаем при условиях

$$m_2^2\mu^2 l_2^2 - (b_1^2\nu^2 - m_2^2\mu^2) f_k^2 > 0, \qquad b_1\nu \neq m_2\mu, \tag{22}$$

а решения (20) и (21) соответственно при

$$m_2^2\mu^2 l_2^2 - (b_1^2\nu^2 - m_2^2\mu^2) f_k^2 = 0, \qquad b_1\nu \neq m_2\mu; \tag{23}$$

$$b_1\nu = m_2\mu. \tag{24}$$

Решения (20) и (21) имеют меньшее значение для практики, чем (18) и (19), так как существуют при условиях (23) и (24), в действительности выполняемых сравнительно редко.

Мощность N, развиваемая двигателем при установившихся режимах (10), сразу определяется из равенств (11) и (12)

$$N = m_2\mu\nu\sin\beta\dot{\psi}^3. \tag{25}$$

Дробящее усилие D численно совпадает с нормальной реакцией дробимого материала (а при холостом ходе — с реакцией неподвижной чаши дробилки). Это усилие при условиях (10) находим из уравнений (5) и (6)

$$D = (b_1\nu + m_2\mu\cos\beta)\dot{\psi}^2. \tag{26}$$

Вопрос оптимального выбора параметров дробилки по формулам (25) и (26) требует дальнейшего исследования.

Рассмотрим для предельного случая установившиеся движения дробилки, соответствующие частным решениям (18) и (19) дифференциальных уравнений (7) и (8).

Будем исследовать устойчивость указанных решений по Ляпунову. Для этого уравнения (7) и (8) приводим к «нормальному» виду. Затем составляем уравнения «возмущенного» движения и уравнения «в вариациях» Пуанкаре. Уравнения первого приближения будут иметь в нашем случае постоянные коэффициенты. Эти уравнения, разумеется, пишем для каждого из решений (18) и (19) отдельно и отдельно же для них составляем характеристические уравнения.

Исследовать корни последних при буквенных значениях параметров не представляется возможным. Поэтому исследование проводим при численных значениях параметров. Например, для решения (19) использованы следующие значения: $m_1 = 11\,000$ *кг*, $m_2 = 1340$ *кг*, $\mu = 0{,}089$ *м*, $\nu = 0{,}0325$ *м*, $l_2 = 0{,}825$ *м*, $I_{1O_1} = 416\,000$ *н · м/сек²*, $I_{2O_1} = 39\,800$ *н · м/сек²*, $f_k = 0{,}25$ *м*.

Характеристические уравнения первого приближения при выбранных значениях параметров не имеют нулевых корней. Поэтому уже по первому приближению можно судить о характере устойчивости решений. На основании критерия Льенара — Шипара характеристическое уравнение, соответ-

ствующее решению (20), не имеет корней с положительными вещественными частями. Это решение, по Ляпунову, асимптотически устойчиво. Заметим, что здесь имеется в виду устойчивость относительная (ставится условие $\nu = \text{const}$). На основании того же критерия характеристическое уравнение, соответствующее решению (19), имеет по крайней мере один корень с положительной вещественной частью. Это решение неустойчиво.

Выводы

1. Возможно существование установившихся режимов (10), если между параметрами дробилки имеются соотношения (17). При этом, как легко установить, дебаланс (тело *II*) отклоняется от плоскости осей $O\zeta$ и O_1z только в сторону прецессионного вращения на острый или «малый» (меньший развернутого) тупой угол, так как из формулы (15) следует, что знаки $\dot{\psi}$ и $\sin\beta$ совпадают.

2. Для получения большего значения дробящей силы желателен такой выбор параметров, при котором угол β был бы наименьшим, как это следует из формулы (26).

3. При конкретных численных данных обнаружена относительная асимптотическая устойчивость по Ляпунову режима, соответствующего решению (19), и неустойчивость режима, соответствующего решению (18).

4. При установившихся режимах (10) мощность двигателя пропорциональна кубу угловой скорости прецессии, как это видно из формулы (25).

5. Дробящее усилие пропорционально квадрату угловой скорости прецессии согласно формуле (26).