Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.512.2/.4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ОТ КВАДРАТА ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Н. Н. Казаринова

Покажем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\varphi)\sin\psi\,d\psi = \frac{\sin p\pi}{\pi(2p+1)}\,[\beta(p+1)-\beta(-p)]. \qquad (1)$$

Здесь $P_p(x)$ — функция Лежандра, $p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

где, в свою очередь, $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся известной формулой для нецелого p *:

$$P_p(\cos\varphi)\,P_p(\cos\psi) = \frac{\sin p\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p+k+1}\right)P_k(\cos\varphi)\,P_k(\cos\psi),$$

справедливой для $-\pi < \varphi \pm \psi < \pi$.

Положим $\varphi = \psi$, тогда получим

$$P_p^2(\cos\varphi) = \frac{\sin p\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p+k+1}\right)P_k^2(\cos\psi).$$

Ряд, стоящий в правой части, сходится равномерно в промежутке $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, поэтому можно применить почленное интегрирование

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{\sin p\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p+k+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Известно, что **

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2k+1}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

---

*McRobert T. M. Spherical harmonics, 1948.

** И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{\sin p\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k}-\frac{1}{p+k+1}\right)\frac{1}{2k+1} =$$

$$= \frac{\sin p\pi}{\pi(2p+1)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p-k}+\frac{1}{k+p+1}\right).$$

Воспользуемся представлением в виде ряда функции $\beta(x)$:

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}.$$

Отсюда и получим формулу (1).
Из (1) легко вывести асимптотическую формулу при $|p|\to\infty$.
При действительном p имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \approx \frac{1}{2p+1},$$

а при комплексных p, когда $|\operatorname{Im}(p)|$ велико,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \approx \frac{\sin p\pi}{p(2p+1)\pi}.$$