Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 531.15

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ЖЕСТКО СКРЕПЛЕННОГО С НЕЙ ТЕЛА

Н. Н. Казаринова

Рассмотрим задачу вычисления собственных частот осесимметричных колебаний тонкой полусферы радиуса R с массой M, жестко закрепленной по экватору.

Система уравнений в перемещениях, описывающая колебания элемента оболочки, имеет вид [Власов, 1949]

$$\frac{R^2(1-\nu^2)\gamma}{E}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -a\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2 W + (1+a)\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} +$$

$$+(\nu-1-a\nu-3a)\frac{\partial W}{\partial\alpha} + (1+a)(1-\nu)U,$$

$$\frac{R^2(1-\nu^2)\gamma}{E}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -a\nabla^2\nabla^2 W + a\nabla^2\Theta +$$

$$+a(\nu-3)\nabla^2 W - (1+\nu+a\nu-a)\Theta + 2a(\nu-1)W, \qquad (1)$$

$$\Theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sin\alpha U) + 2W,$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ — оператор Лапласа; $W(\alpha, t)$, $U(\alpha, t)$ — нормальное и касательное перемещение элемента оболочки; α — сферическая координата; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; γ — объемная плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; $a = \frac{R^2}{12R^2}$. Величину a в дальнейшем будем трактовать как малый параметр.

Условие жесткого соединения оболочки с массой M обращает в 0 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ нормальное перемещение W и ψ — угол поворота касательной к меридиану. Последний выражается через перемещения как

$$\psi = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha} - U\right).$$

В качестве третьего граничного условия записываем уравнение движения массы M, используя формулу связи нормального растягивающего усилия с деформациями. Получим

$$[W]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial\alpha} - U\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad (2)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = -\frac{M(1-\nu^2)}{2\pi Eh}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}}.$$

Разделяя переменные в поставленной задаче, положим

$$W(\alpha, t) = T(t)\, w(\alpha),$$
$$U(\alpha, t) = T(t)\, u(\alpha),$$
$$\Theta(\alpha, t) = T(t)\, \vartheta(\alpha).$$

Система (1) примет вид

$$-a\frac{d}{d\alpha}\nabla^2 w + (1+a)\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} + (\nu - 1 + a\nu - 3a)\frac{dw}{d\alpha} + (1+a)(1-\nu)u = -\lambda^2 u,$$
$$-a\nabla^2\nabla^2 w + a\nabla^2 w + a(\nu-3)\nabla^2 w - (1+\nu+a\nu-a)\vartheta + 2a(\nu-1)w = -\lambda^2 w, \qquad (3)$$
$$\vartheta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}(\sin\alpha u) + 2w.$$

Граничные условия (2) перепишутся

$$\left.\begin{aligned} w\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ \frac{dw}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) - u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ \frac{du}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \mu\lambda^2 u\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь $\mu = \frac{M}{2\pi R^2\gamma h}$ — отношение массы прикрепленного тела к массе оболочки. При $\mu \to \infty$ рассматриваемая задача сводится к задаче о колебаниях жестко закрепленной у основания полусферы. Можно преобразовать систему (3) к одному уравнению относительно одной неизвестной функции

$$a\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w + a(4+\lambda^2)\nabla^2\nabla^2 w + [1-\nu^2-\lambda^2+a(5-\nu^2-\nu\lambda^2)]\nabla^2 w + \\ + [-\lambda^4+\lambda^2(3\nu+1)+2(1-\nu^2)+a[-\lambda^2(1-\nu)+2(1-\nu^2)]w = 0. \qquad (5)$$

Граничные условия (4) тоже надо преобразовывать так, чтобы в них входила одна неизвестная функция $w(\alpha)$. Для этого выразим $u(\alpha)$ через $w(\alpha)$, принимая, что в силу симметричности задачи $u(0) = 0$. Легко показать, что

$$u = \frac{1}{(1+\nu)(1+a)+\lambda^2 a}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\int_0^\alpha [-a\nabla^2\nabla^2 w - 2a\nabla^2 w + \\ + (\lambda^2 - 2 - 2\nu)(1+a)w]\sin\alpha\, d\alpha. \qquad (6)$$

Решение уравнения (5) ищем в виде функции Лежандра, удовлетворяющей уравнению $\nabla^2 w + p(p+1)w = 0$.

Тогда для определения $k = p(p+1)$ получается кубическое уравнение

$$ak^3 - a(4+\lambda^2)k^2 + [1-\nu^2-\lambda^2+a(5-\nu^2-\nu\lambda^2)]k + \\ + \lambda^4 - \lambda^2(3\nu+1) - 2(1-\nu^2) - a[-\lambda^2(1-\nu)+2(1-\nu^2)] = 0. \qquad (7)$$

Каждому корню k_i $(i = 1, 2, 3)$ уравнения (7) соответствуют два линейно-независимых решения уравнения (5) — функции Лежандра I и II рода $P_{p_i}(\cos\alpha)$ и $Q_{p_i}(\cos\alpha)$, где $p_i(p_i+1) = k_i$. Однако в общем решении уравнения (5) следует положить равными 0 коэффициенты при $Q_{p_i}(\cos\alpha)$, так как рассматриваемая задача не имеет особенности при $\alpha = 0$. Тогда общее решение задачи получим в виде

$$w = c_1 P_{p_1}(\cos\alpha) + c_2 P_{p_2}(\cos\alpha) + c_3 P_{p_3}(\cos\alpha). \qquad (8)$$

Подставив решение (8) в граничные условия (4)—(6) и приравняв нулю определитель полученной системы, получим характеристическое уравнение для определения собственных чисел λ.

При определении корней уравнения (7) следует рассмотреть две области определения λ.

1. $|\lambda^2-1+\nu^2| \gg 0$. Можно показать, что в этом случае корни уравнения (7) имеют вид

$$k_1=\frac{\lambda^4-\lambda^2(3\nu+1)-2(1-\nu^2)}{\lambda^2-1+\nu^2}+0(a),$$

$$k_2=\frac{\sqrt{\lambda^2-1+\nu^2}}{\sqrt{a}}+0(1),$$

$$k_3=-\frac{\sqrt{\lambda^2-1+\nu^2}}{\sqrt{a}}+0(1).$$

Характеристическое уравнение запишется

$$\left(\frac{P'_{p_1}(0)}{P_{p_1}(0)}+\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda^2+1-\nu}{\lambda^2}\right)\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda^2-1+\nu^2}}{\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]+0\left(\sqrt[4]{a}\right)=0. \tag{9}$$

При составлении этого уравнения для $P_{p_2}(\cos\alpha)$ и $P_{p_3}(\cos\alpha)$ применялась известная асимптотическая формула для функций Лежандра [Градштейн, Рыжик, 1962]

$$P_p(\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p\pi\sin\alpha}}\cos\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha-\frac{\pi}{4}\right]+0\left(p^{-3/2}\right). \tag{10}$$

Отбросим в (9) второе слагаемое порядка $\sqrt[4]{a}$. Тогда характеристическое уравнение распадается на два

$$\frac{P'_{p_1}(0)}{P_{p_1}(0)}+\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda^2+1-\nu}{\lambda^2}=0, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt[4]{\lambda^2-1+\nu^2}}{\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0. \tag{12}$$

Легко показать, что если λ_0 — корень уравнения (11), то соответствующий корень уравнения (9) будет $\lambda=\lambda_0+0\left(\sqrt[4]{a}\right)$, и что если λ_0^* — корень уравнения (12), то соответствующий корень уравнения (9) будет $\lambda=\lambda_0^*+0\left(\sqrt{a}\right)$. Корни уравнения (12) в рассматриваемой области определяются по формуле $\lambda_n=1-\nu^2+a(2n)^4$, где n — целое.

Исследуем корни уравнения (11). Применив известные формулы для значений $P_p(0)$ и $P'_p(0)$, получим

$$(p_1+1)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p_1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p_1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{p_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{p_1}{2}\right)}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\lambda^2+1-\nu}{\lambda^2}.$$

Здесь

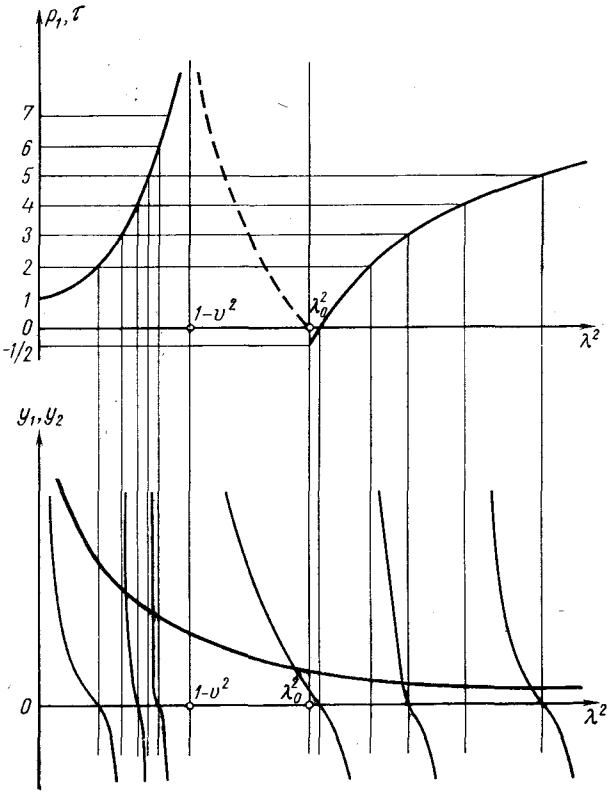
$$p_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda^4-\lambda^2(12\nu+3)-9(1-\nu^2)}{\lambda^2-1+\nu^2}},$$

p_1 вещественно, когда λ^2 находится вне промежутка $(1-\nu^2,\ \lambda_0^2)$, где

$$\lambda_0^2=\frac{12\nu+3}{8}+\sqrt{\left(\frac{12\nu+3}{8}\right)^2+\frac{9}{4}(1-\nu^2)}.$$

Вне этого промежутка график функции $p_1 = p_1(\lambda^2)$ представлен сплошной линией. Внутри промежутка $p_1 = -\frac{1}{2} + i\tau(\lambda^2)$ и график $\tau = \tau(\lambda^2)$ показаны пунктиром (рисунок). В нижней части чертежа жирной линией дан график функции $y_1 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2+1-\nu}{\lambda^2}$, а тонкой — график функции

$$y_2(\lambda^2) = (p_1+1)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p_1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{p_1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{p_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{p_1}{2}\right)}.$$



Графическое определение собственных чисел при λ, не близких к 0.

Функция y_2 имеет полюсы в точках $p_1 = 2l + 1$ и нули в точках $p_1 = 2l$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Это следует из того факта, что $\Gamma(x)$ не имеет нулей и имеет полюсы при $x = -l$, а $p_1 \geqslant -\frac{1}{2}$. На пересечении графиков функций y_1 и y_2 найдем корни уравнения (11).

Заметим, что в промежутке $(1-\nu^2, \lambda_0^2)$ имеется не больше одного корня, а вне этого промежутка их бесчисленное множество, причем при больших значениях этих корней их можно вычислять по асимптотической формуле $\lambda \approx \lambda_m^*$, где

$$\lambda_m^* = \frac{12\nu+3}{8} + \frac{(2m+0{,}5)^2}{2} + \sqrt{\left[\frac{12\nu+3}{8} + \frac{(2m+0{,}5)}{2}\right]^2 + \frac{9}{4}(1-\nu^2) - (1-\nu^2)(2m+0{,}5)^2}$$

соответствующие собственные числа жестко закрепленной у основания полусферы (m — целое число).

В окрестности точки $\lambda^2 = 1-\nu^2$ корни имеют точку сгущения, что не соответствует истинному положению вещей, так как рассуждения велись в предположении, что λ^2 не близко к $1-\nu^2$.

2. λ^2 близко к $1-\nu^2$. Положим [Товстик, 1965]

$$\lambda^2 = 1-\nu^2 + a^{1/3} b^{2/3} \frac{s^6-1}{s^2}, \quad s \geqslant 0,$$

где $b=(1+\nu)(2+\nu)(1-\nu^2)$.

Корни уравнения (7) следует искать в виде ряда по степеням $a^{1/3}$. Получим

$$k_1 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\, s^2 + 0(1),$$

$$k_2 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{2}\left(-s^2 + \frac{\sqrt{s^6-4}}{s}\right) + 0(1),$$

$$k_3 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{2}\left(-s^2 - \frac{\sqrt{s^6-4}}{s}\right) + 0(1).$$

Для всех трех функций Лежандра можно применить асимптотическую формулу (10).

Характеристическое уравнение в этом случае запишется так

$$\operatorname{ctg}\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\, s\, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-s^3}{\sqrt{s^3(s^3+2)}} - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2+\nu}{1+\nu} \sqrt[6]{\frac{a}{b}} \cdot \frac{2s^6+1}{s^4(s^3+2)}.$$

При $s \to \infty$ это уравнение переходит в уравнение (12) с корнями $\lambda_n = 1-\nu^2 + a(2n)^4$, что соответствует

$$s_n = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}\, 2n.$$

Пример. Были проведены вычисления собственных частот

$$\omega = \lambda \sqrt{\frac{E}{R^2(1-\nu^2)\gamma}}$$

для следующих значений параметров $\nu = 0{,}3$; $h = \sqrt{12}$ *мм*; $R = 1$ *м*; $\mu = 10$.

Несколько значений первых собственных чисел λ: 0,691; 0,883; 0,912; 0,926; 0,941; 0,953; 0,965; 0,981; 1,002; 1,03; 1,07; 1,11; 1,77; 1,24; 1,31; 1,40; 1,50; 1,61; 1,86; 2,005; 2,15.

ЛИТЕРАТУРА

Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Товстик П. Е. Свободные колебания тонкого сферического купола. Изв. АН СССР, Механика, № 6, 1965.