Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.564

О РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

И. В. Быкова

Задача о радиальных колебаниях полого бесконечного цилиндра, на внутреннюю поверхность которого действует переменное давление $f(t)$, сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right) = 0, \tag{1}$$

где $c^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$; $U(r, t)$ — радиальное перемещение слоя: ρ — объемная плотность; μ — модуль сдвига; E — модуль Юнга; $E = \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$.

При граничных условиях

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}\lambda\right]_{r=a} = f(t), \tag{2}$$

причем $f(0) = 0$,

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r}\lambda\right]_{r=b} = 0, \tag{3}$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы.

При начальных условиях

$$U(r, 0) = 0; \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

Решение ищем в виде суммы трех функций

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \tag{6}$$

Функцию $U_1(r, t)$ представим как линейную функцию от r

$$U_1 = A(t)\, r + B(t), \tag{7}$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda\frac{U_1}{r}\right]_{r=a} = f(t), \tag{8}$$

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_1}{\partial t} + \lambda\frac{U_1}{r}\right]_{r=b} = 0. \tag{9}$$

Подставляя (7) в (8) и (9), найдем

$$A(t) = -\frac{f(t)\, a}{2(\lambda+\mu)(b-a)} \quad \text{и} \quad B(t) = \frac{f(t)\, ab}{\lambda(b-a)}. \tag{10}$$

Тогда

$$U_1(r, t) = A(t)\left[r - 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}b\right]. \tag{11}$$

При этом $U_1(r,\ 0)=0$, так как в начальный момент времени давление $f(0)=0$. Результат подстановки $U_1(r,\ t)$ в левую часть уравнения (1) обозначим

$$\Phi(r,\ t)=-A''(t)\left(r-2\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\,b\right)+2c^2b\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\cdot\frac{A(t)}{r^2}. \tag{12}$$

Функцию $U_2(r,\ t)$ выбираем так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial^2U_2}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2U_2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial r}-\frac{U_2}{r^2}\right)=\Phi(r,\ t), \tag{13}$$

граничным условиям

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_2}{\partial r}+\lambda\,\frac{U_2}{r}\right]_{\substack{r=a\\ r=b}}=0 \tag{14}$$

и начальным условиям

$$U_2(r,\ 0)=0, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{16}$$

Тогда функция $U_3(r,\ t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2U_3}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2U_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_3}{\partial r}-\frac{U_3}{r^2}\right)=0, \tag{17}$$

граничным условиям

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_3}{\partial r}+\lambda\,\frac{U_3}{r}\right]_{\substack{r=a\\ r=b}}=0 \tag{18}$$

и начальным условиям

$$U_3(r,\ 0)=0; \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial U_3}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial U_1}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{20}$$

Следуя методу Фурье, положим

$$U_3(r,t)=R(r)\,T(t). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), получим уравнения для $T(t)$ и $R(r)$, решения которых есть известные функции

$$T(t)=C\cos c\,pt+D\sin cpt, \tag{22}$$

$$R(r)=MJ_1(pr)+N\Upsilon_1(pr). \tag{23}$$

Для определения коэффициентов M и N подставим (23) в (18), что дает линейную однородную систему относительно M и N. Так как M и N не могут одновременно обращаться в 0, то определитель этой системы должен равняться 0

$$\begin{vmatrix} pa(\lambda+2\mu)J_1'(pa)+\lambda J_1(pa), & pa(\lambda+2\mu)\Upsilon_1'(pa)+\lambda\Upsilon_1(pa)\\ pb(\lambda+2\mu)J_1'(pb)+\lambda J_1(pb), & pb(\lambda+2\mu)\Upsilon_1'(pb)+\lambda\Upsilon_1(pb)\end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Это означает, что числа p не могут быть выбраны произвольно, а должны быть корнями уравнения (24). Обозначив их $p_1,\ p_2,\ \ldots$, можно взять

$$\left.\begin{aligned} M_k&=ap_k(\lambda+2\mu)\Upsilon_1'(p_ka)+\lambda\Upsilon_1(p_ka)\\ N_k&=-[ap_k(\lambda+2\mu)J_1'(p_ka)+\lambda J_1(p_ka)]\end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Тогда

$$R_k(r) = M_k I_1(p_k r) + N_k \Upsilon_1(p_k r) = Z_1(p_k r), \tag{26}$$

$$T_k(t) = C_k \cos c p_k t + D_k \sin c p_k t. \tag{27}$$

Искомая функция

$$U_3(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, Z_1(p_k r). \tag{28}$$

Из начального условия $U_3(r, 0) = 0$ следует, что $C_k = 0$. Из начального условия (20) и ортогональности функций $Z_1(p_k r)$ на отрезке $[a, b]$ с весом r получим

$$D_k = -\frac{A'(0) \int_a^b r \left(r - 2b \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right) Z_1(p_k r)\, dr}{c p_k \int_a^b r Z_1^2 p_k\ r)\, dr}. \tag{29}$$

Итак, функция

$$U_3(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin c p_k t Z_1(p_k r). \tag{30}$$

Найдем функцию $U_2(r,\ t)$. Представим $\Phi(r,\ t)$ в виде ряда по функциям $Z_1(p_k r)$

$$\Phi(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k(t)\, Z_1(p_k r), \tag{31}$$

где коэффициенты

$$N_k(t) = \frac{\int_a^b r \Phi(r,\ t)\, Z_1(p_k r)\, dr}{\int_a^b r Z_1^2(p_k r)\, dr}. \tag{32}$$

$U_2(r,\ t)$ напишем в виде ряда по функциям $Z_1(p_k\ r)$

$$U_2(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)\, Z_1(p_k r). \tag{33}$$

Подставляя (33) в (13) и используя (15) и (16), получим для $S_k(t)$ уравнение

$$S_k''(t) + p_k^2 c^2 S_k(t) = N_k(t) \tag{34}$$

с начальными условиями

$$S_k(0) = 0; \quad S_k'(0) = 0, \tag{35}$$

тогда

$$S_k(t) = \frac{1}{p_k c} \int_0^t N_k(\tau) \sin p_k c\,(t - \tau)\, d\tau. \tag{36}$$

Итак,

$$U_2(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)\, Z_1(p_k r). \tag{37}$$

Складывая найденные функции $U_1(r,\ t)$, $U_2(r,\ t)$ и $U_3(r,\ t)$, получим

$$U(r,\ t)=\frac{a}{c\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_1(p_k a)}{p_k\int\limits_a^b rZ_1^2(p_k r)\,dr}\int\limits_0^t f(\tau)\sin p_k c\,(t-\tau)\,d\tau\,Z_1(p_k r).$$

Этот результат точно совпадает с результатом, полученным А. Н. Крыловым *, который решал эту задачу, заменив приложенное давление равномерно распределенной по слою объемной силой $F(r,\ t)=\frac{1}{\lambda\rho}f(t)$, а затем в найденном решении перешел к пределу при $\lambda\to 0$. При таком способе решения искомая функция $U(r,\ t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{U}{r^2}\right)=F(r,\ t)$$

с однородными граничными условиями

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U}{\partial r}+\lambda\frac{U}{r}\right]_{\substack{r=a\\ r=b}}=0$$

и начальными условиями

$$U(r,\ 0)=0;\quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Известно, что решение задач с однородными граничными условиями проще. Возникает вопрос о возможности использования и в других задачах приема, так удачно предложенного А. Н. Крыловым в задаче о радиальных колебаниях полого цилиндра.

---

* А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехтеоретиздат, 1950.