Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 531.391

ОБ ОСНОВНОМ УРАВНЕНИИ ДИНАМИКИ НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

П. А. Журавлев

Определение наибольших динамических усилий в подъемных канатах связано с исследованием колебательных процессов в нити переменной длины с грузом на конце.

Дифференциальные уравнения продольных колебаний упругой весомой нити впервые выведены и решались Н. П. Нероновым [1937; 1961]. Эти уравнения и их точное решение, полученное методом характеристик, сложны и неудобны для практического применения. Однако доведенные до числового примера, они могут быть использованы для сравнения приближенных методов с точным решением задачи.

Другой способ математического описания колебательных процессов в одноразмерных объектах переменной длины [Журавлев, 1965] приводит к волновому уравнению обычного вида.

За искомую функцию, описывающую колебательный процесс в нити, примем абсолютную координату X какого-либо сечения M нити (рисунок). Координату отсчитываем от точки C неподвижной горизонтальной плоскости, проходящей через ось барабана. Независимыми переменными будут время t и относительная координата x сечения, отсчитанная от точки B прикрепления груза к нити и фиксирующая положение элементов нити относительно самой нити. Относительная координата x представляет собой нормальную длину части нити BM в ее недеформированном состоянии. Пределы изменения переменной x

$$0 \leqslant x \leqslant l\,(t),$$

где $l\,(t)$ — нормальная длина в недеформированном состоянии всей отвесной части нити, изменяющаяся с течением времени вследствие навивания каната на барабан.

Чтобы составить дифференциальное уравнение для определения функции $X = X\,(x,\ t)$, применим к элементу нити MM' теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось X, направленную вертикально вниз,

$$\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 X\,(x,\ t)}{\partial t^2} = \rho g\,\Delta x + T - T', \tag{1}$$

где ρ — масса единицы длины недеформированной нити; Δx — длина недеформированного элемента нити MM'; $\rho\Delta x$ — масса элемента нити (величина, не зависящая от его деформации); g — ускорение силы тяжести; T и T' — соответственно усилия в сечениях нити M и M'.

Усилие $T' = T\,(x + \Delta x,\ t)$ связано с усилием $T = T\,(x,\ t)$ по формуле Тейлора

$$T\,(x+\Delta x,\ t) = T\,(x,\ t) + \frac{\partial T\,(x,\ t)}{\partial x}\,\Delta x + \ldots \tag{2}$$

Заметим, что в уравнение (1) не вошли внутренние силы элемента нити. Влияние их на движение центра масс элемента может сказаться косвенно,

через внешние для данного элемента силы T и T'. Внутренние силы проявятся, если их работа при деформации элемента не равна нулю. Они будут стремиться погасить колебательный процесс в нити. Для идеально упругой нити работа внутренних сил равна нулю.

Принимается, что статическое и динамическое усилия в сечении нити связаны с относительным удлинением ε элемента нити, примыкающего к этому сечению по закону Гука $T = k\varepsilon$, где k — коэффициент жесткости нити — считается известным, $k = EF$; E — модуль упругости; F — площадь поперечного сечения каната.

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{MM' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{X(x, t) - X(x + \Delta x, t) - \Delta x}{\Delta x}.$$

По формуле Тейлора

$$X(x + \Delta x, t) = X(x, t) + \frac{\partial X(x, t)}{\partial x}\Delta x + \ldots$$

Поэтому с обычно принятой в теории упругости точностью имеем $\varepsilon = -1 - \frac{\partial X(x, t)}{\partial x}$.

Усилие в сечении M нити

$$T(x, t) = -k\left(1 + \frac{\partial X(x, t)}{\partial x}\right). \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (2) и затем в (1), деления на $\rho\Delta x$ и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = g + c^2 \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2}, \qquad (4)$$

где $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ — скорость распространения волны.

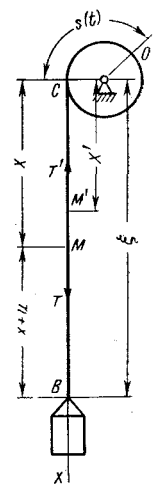


Схема подъема.

Граничных условий будет два. В нижнем сечении B при $x = 0$ это будет дифференциальное уравнение движения груза массы m

$$\left.\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2}\right|_{x=0} = g + b\left(1 + \left.\frac{\partial X(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0}\right), \quad b = \frac{k}{m}. \qquad (5)$$

В верхнем сечении C при $x = l(t)$ при отсутствии скольжения нити по ободу барабана граничное условие заключается в равенстве абсолютной скорости сечения C нити и скорости точки C обода барабана:

$$\left.\frac{\partial X(x, t)}{\partial t}\right|_{x=l(t)} = -\dot{s}(t). \qquad (6)$$

Начальные условия задаются, как обычно, для функции $X(x, 0)$ и производной $\frac{\partial X(x, 0)}{\partial t}$, $0 \leqslant x \leqslant l_0$.

Заметим, что дифференциальные уравнения продольных колебаний вертикальной нити постоянной нормальной длины с грузом на нижнем конце, верхний конец которой движется по заданному закону, имеют тот же вид. Однако весьма существенно, что при этом область изменения независимой переменной x будет постоянной, $0 \leqslant x \leqslant l_0$ и в граничном условии (6) $x = l_0$. Взяв за искомую функцию удлинение $u = u(x, t)$ части MB нити (рисунок)

$$MB = x + u(x, t),$$

Н. П. Неронов [1937] пришел к функционально-дифференциальному уравнению волнового типа

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0}. \qquad (7)$$

В сечении B граничное условие $u(x, t) = 0$ при $x = 0$. Граничное условие в точке C нити усложняется

$$\ddot{s}(t) + \dot{s}(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}\Big|_{x=l(t)} = -g + c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l(t)}. \quad (8)$$

Начальные условия должны быть заданы для $u(x, 0)$ и $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$. Легко убедиться в эквивалентности уравнений (4) и (7) с соответствующими граничными и начальными условиями. Действительно, $X(x, t) = \xi - x - u(x, t)$. $\xi = X(0, t)$.

Отсюда

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} = \ddot{\xi} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial X(x, t)}{\partial x} = -1 - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad T(x, t) = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

После подстановки в (4) и исключения $\ddot{\xi}$ при помощи дифференциального уравнения движения груза мы приходим к уравнению (7), которое включает в себя и граничное условие в точке B. Усложнение граничного условия в точке C произошло вследствие необходимости исключения $\ddot{\xi}$ из этого условия, которое имеет вид

$$\dot{\xi} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l(t)} = -\dot{s}(t). \quad (9)$$

Это исключение производится при помощи дифференциального уравнения движения груза, куда входит $\ddot{\xi}$. Поэтому приходится дифференцировать равенство (9) еще раз по времени, принимая во внимание, что при этом надо дифференцировать по времени и $x = l(t)$. Производную $\dot{l}(t)$ можно найти, продифференцировав по t равенство

$$\xi - l(t) - u(x, t)|_{x=l(t)} = 0.$$

Тогда с учетом (9) будем иметь

$$\dot{l}(t) = -\frac{\dot{s}(t)}{1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l(t)}}.$$

В связи с принятым в теории упругости предположением о малости относительного удлинения получаем $\dot{l}(t) = -\dot{s}(t)$, $l(t) = -s(t) + l_0$, при $t = 0$, $s = 0$, $l = l_0$.

Введем вместо функции $X(x, t)$ функцию $Z(x, t)$, положив

$$X(x, t) = Z(x, t) - \frac{\rho g}{2k} x^2 - \left(1 + \frac{mg}{k}\right) x.$$

Тогда основное уравнение (4) запишется в виде обычного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2}.$$

Граничные условия (5) и (6) примут вид

$$\frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial t^2}\Big|_{x=0} = b \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad b = \frac{k}{m},$$

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial t}\Big|_{x=l(t)} = -\dot{s}(t).$$

Начальные условия формулируются для $Z(x, 0)$ и $\frac{\partial Z(x, 0)}{\partial t}$. Усилие в сечении нити будет

$$T = \rho g x + mg - k\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = T_{ст} - k\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x}.$$

Изложенный способ изучения динамики нити переменной длины заключается в составлении дифференциальных уравнений для искомой функции — абсолютной координаты произвольного сечения нити — в зависимости от времени и относительной координаты, отсчитанной от точки прикрепления груза к нити. Этот способ может быть использован и при решении задачи о движении закрученной нити переменной длины, а также других динамических задач подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

Журавлев П. А. К динамике шахтного подъема. В сб. Стальные канаты, № 2, Техника, 1965.

Неронов Н. П. Об упругих деформациях в подъемном канате. Прикл. мат. и мех., т. 1, вып. 1, 1937.

Неронов Н. П. Определение натяжений в шахтном подъемном канате для точки подвеса груза. Зап. ЛГИ, т. XXXIX, вып. 3, 1961.