Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 531.53

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ИНЕРЦИОННОГО МАЯТНИКА С ГРУЗОМ ПРИ БОЛЬШИХ КОЛЕБАНИЯХ

Л. С. Бурштейн, Ж. М. Виленская, А. Ф. Захаревич

Современное развитие механики горных пород выдвинуло важную задачу изучения влияния скорости деформации на свойства пород. Исследование процессов разрушения пород при динамических нагрузках имеет большое значение для совершенствования технологии добычи полезных ископаемых. Механические свойства при динамическом нагружении важно знать при конструировании горных машин, бурении скважин на больших скоростях, разрушении пород взрывом.

Динамические испытания на стандартном маятниковом копре типа Шарпи для горных пород нецелесообразны ввиду больших потерь энергии, среди которых важное место занимают потери из-за гибкости стержня маятника и возникающих благодаря этому вибраций. Кроме того, при ударе по образцу ударяющая масса вместе с пружинящей массой образца составляют колебательную систему, в которой возникают собственные колебания. Благодаря последним разрушающая нагрузка не возрастает плавно, а сопровождается медленно затухающими колебаниями, которые вызывают дополнительный расход энергии, обусловленный внутренним трением в материале. Чем тяжелее маятник, тем меньше собственная частота и возможное число колебаний до момента разрушения.

На кафедре сопротивления материалов Ленинградского горного института разработана и осуществлена конструкция копра, в котором указанные недостатки сведены к минимуму *. Одна из особенностей копра — отсутствие маятника в виде длинного тонкого стержня с грузом на конце. Роль маятника (рис. 1) здесь выполняет массивный диск *1*, на который насаживаются грузы *2*. К наружной поверхности диска прикреплен боек *3*, ударяющий по образцу. Замена длинного тонкого стержня массивным инерционным диском приводит к резкому уменьшению собственной частоты системы, а следовательно, и к уменьшению потерь энергии в копре. В связи с этим возникает необходимость разработки для такой системы методики расчета собственной частоты при больших колебаниях.

Моменты инерции отдельных элементов системы вычисляются следующим образом.

Момент инерции груза относительно оси вращения маятника

$$J_1 = \frac{p_1}{g}\left(\frac{R_1^2}{2} + r^2\right),$$

где p_1 — вес груза, *кг*; R_1 — радиус груза, *см*; r — расстояние от центра тяжести груза до оси вращения маятника, *см*.

---

* Л. С. Бурштейн. Копер для испытания образцов горных пород. Бюлл. № 4 Госкомитета по делам изобретений и открытий СССР, 1964.

Момент инерции обода маятника

$$J_2 = \frac{p_2}{g} \cdot \frac{(R_2^2 + R_3^2)}{2},$$

где p_2 — вес маятника, *кг*; R_2 и R_3 — соответственно наружный и внутренний радиусы маятника, *см*.

Момент инерции перемычки маятника

$$J_3 = \frac{p_3 L^2}{12g},$$

где $L = 2R_3$ — длина перемычки, *см*; p_3 — вес перемычки маятника, *кг*.

Дифференциальное уравнение вращения маятника имеет вид

$$(J_1 + J_2 + J_3)\ddot{\varphi} = -rp_1 \sin\varphi,$$

где φ — угловая координата, *рад*.

Обозначим

$$\frac{p_1 r}{J_1 + J_2 + J_3} = n^2.$$

Тогда

$$\ddot{\varphi} + n^2 \sin\varphi = 0. \qquad (1)$$

Первый интеграл уравнения (1) имеет вид

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = n^2 \cos\varphi + C. \qquad (2)$$

Пусть φ_0 — угол максимального отклонения маятника. Тогда при $\varphi = \varphi_0$ имеем $\dot{\varphi}_0 = 0$, откуда $C = -n^2 \cos\varphi_0$. Подставляя C в (2), найдем

$$\dot{\varphi}^2 = 2n^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0). \qquad (3)$$

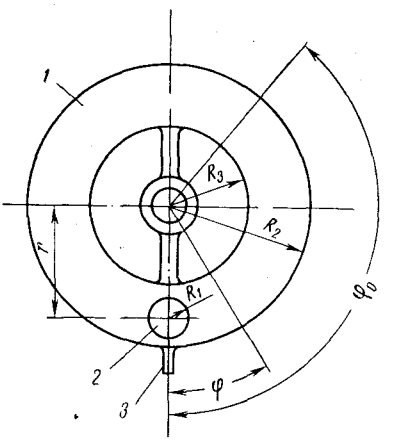


Рис. 1. Расчетная схема инерционного маятника.

Из уравнения (3) видно, что при движении маятника угол φ будет изменяться между значениями φ_0 и $-\varphi_0$, т. е. маятник будет совершать колебательное движение. Будем отсчитывать время t от момента прохождения маятника через вертикаль при его движении вправо (рис. 1). Тогда при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} > 0$. Из (3) найдем

$$\frac{d\varphi}{dt} = n\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} = 2n\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (4)$$

Перейдем к новому переменному, положив $\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin\alpha$,

где $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = n\,dt. \qquad (5)$$

Из начальных условий следует, что при $t = 0$ $\alpha = 0$.

Взяв от обеих частей равенства (5) определенные интегралы справа от 0 до t, а слева от 0 до α, получим закон движения маятника

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = nt. \qquad (6)$$

Интеграл (6) представляет собой эллиптический интеграл первого рода и является функцией верхнего предела α и модуля k.

Найдем период τ колебаний маятника. Из положения $\varphi = 0$ в положение $\varphi = \varphi_0$ маятник проходит за четверть периода, так как при $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$, а при $\varphi = \varphi_0$ величина $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то из уравнения (6) следует

$$\tau = \frac{4}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

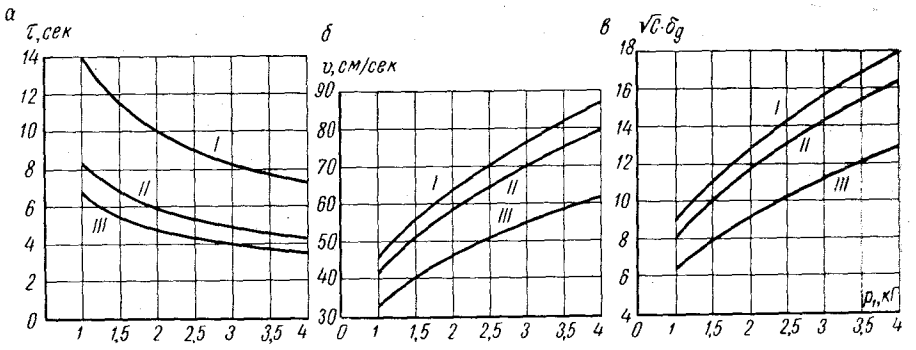


Рис. 2. Зависимость от величины груза и наибольшей амплитуды: *а* — периода колебаний, *б* — скорости центра груза, *в* — динамического прогиба. *I* — $\varphi_0 = 171°$; *II* — $\varphi_0 = 131°$; *III* — $\varphi_0 = 91°$

Таким образом, определение периода колебаний маятника сводится к вычислению четверти периода эллиптического интеграла, что можно сделать, пользуясь таблицами для этого интеграла *.

На рис. 2, *а* приведены результаты вычислений периодов колебаний маятника при $J_2 + J_3 = 15{,}224$ *кГ·см/сек*^{2}, $r = 20$ *см*. Вес груза p_1 менялся от 1 до 4 *кГ* через каждые 0,5 *кГ*, $R_1 = 4{,}5$ *см*.

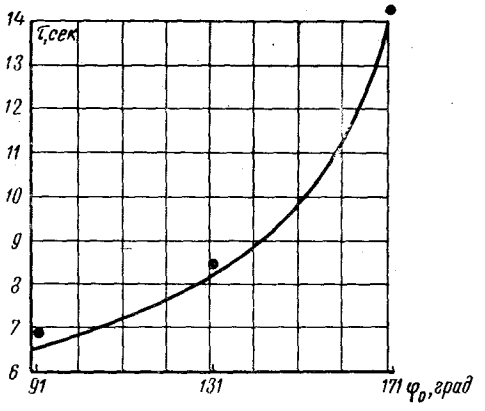


Рис. 3. Сопоставление вычисленной частоты колебаний с опытной для различных амплитуд.

При испытаниях на изгибающий удар важное значение имеет максимальная скорость маятника в момент удара, которую нетрудно найти из (4) при $\varphi = 0$

$$v = r \frac{d\varphi}{dt} = rn \sqrt{2(1 - \cos \varphi_0)}.$$

Зная расстояние от центра груза до бойка, можно найти скорость бойка в момент его удара по образцу (рис. 2, *б*). Кривые (рис. 2, *а*, *б*) наглядно показывают влияние веса груза и наибольшей амплитуды на динамические характеристики копра: при увеличении амплитуды колебаний φ_0 период колебаний маятника возрастает. При этом влияние груза p_1 на величину периода колебаний более существенно для больших амплитуд φ_0, чем для малых. Так, для $\varphi_0 = 91°$ увеличение груза от 1 до 4 *кГ* приводит к уменьшению периода колебаний на 3 *сек*, между тем как при $\varphi_0 = 171°$, при этих же условиях, снижение периода составляет 6,6 *сек*. Аналогично и для скорости маятника в момент удара: с увеличением груза от 1 до 4 *кГ* скорость при амплитуде $\varphi_0 = 171°$ возрастает больше, чем при амплитуде 91°.

* Ю. С. Сикорский. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ НКТП СССР, 1936.

Опыт показывает, что для многих горных пород при ударе зависимость между напряжением и деформацией близка к линейной, т. е. соблюдается закон Гука. Для таких пород можно теоретически вычислить значение динамического прогиба для балки заданных размеров в зависимости от p_1 и φ_0.

Полагая, что кинетическая энергия T маятника полностью переходит в потенциальную энергию $U_д$ деформации образца, можем написать

$$T = U_д. \tag{7}$$

При постепенном (от нуля до окончательного значения) росте ударной силы и пропорциональных ей деформаций $\delta_д$ образца найдем

$$U_д = \frac{c}{2}\delta_д^2, \tag{8}$$

где c — жесткость образца, *кГ/см*.

В нашем опыте образец — балка, свободно опертая по концам. Поэтому

$$c = \frac{48EJ}{l^3},$$

где l — длина балки, *см*; J — момент инерции поперечного сечения, *см*^{4}; E — модуль упругости, *кГ/см*^{2}.

Подставляя (8) в (7), получим $\delta_д = \sqrt{\frac{2T}{c}}$.

Кинетическая энергия маятника вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + J_2 + J_3)\dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{12g}[3p_1(R_1^2 + 2r^2) + 3p_2(R_2^2 + R_3^2) + 2p_3R_3^2].$$

С увеличением веса p_1 груза (рис. 2, *в*) динамический прогиб растет быстрее при больших амплитудах, чем при малых. Пользуясь этими кривыми, можно легко определить динамический прогиб образца заданных размеров.

Сопоставление опытных и теоретических данных сделано для периода собственных колебаний, представляющего наиболее важную динамическую характеристику системы. Опытное определение периода собственных колебаний производилось для $p_1 = 1$ *кГ* при максимальных амплитудах $\varphi_0 = 171, 131, 91°$. Веса элементов системы и геометрические размеры приведены выше.

На рис. 3 точками отмечены опытные значения. Теоретические и опытные данные удовлетворительно согласуются между собой. Опытные значения располагаются несколько выше теоретических в связи с небольшими потерями на трение.

Выводы

1. Разработана методика определения собственной частоты и периода инерционного диска с грузом при больших колебаниях.

2. Замена длинного тонкого стержня с грузом на конце массивным инерционным диском, действительно, резко снижает собственную частоту колебаний. Это приводит к значительному сокращению потерь энергии, благодаря чему повышается точность измерений удельной работы деформации, затраченной на разрушение образца.