Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 519.210

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ РЕЗКО ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ПОКАЗАТЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Н. Я. Головенчиц

При обработке опытных данных существенное значение имеет проблема выявления и исключения резко отклоняющихся результатов наблюдений. Этому вопросу посвящены работы многих авторов, предлагающих различные критерии (статистики) для оценки резко отклоняющихся результатов. Однако, как отмечают Э. Гумбель [1965] и Ю. В. Линник [1958], большинство авторов ограничиваются случаем нормального распределения результатов наблюдений.

В статье Ф. Грабса [1950] предложен критерий для определения значимости резко выделяющихся результатов также применительно к нормальному закону распределения. Так, для оценки наибольшего результата в ряду наблюдений применяется критерий вида

$$\frac{S_n^2}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

где $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $\bar{x}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

В работе Ф. Грабса приведена таблица значений предложенного критерия для n (число наблюдений) от 3 до 25 и «уровней значимости» 99 (1); 97,5 (2,5), 95 (5) и 90% (10%). Если величина отношения $\frac{S_n^2}{S^2}$ не превосходит число K, определенное по таблице в зависимости от числа наблюдений и принятого уровня вероятности, то оцениваемый наибольший результат не противоречит всем результатам серии и может быть использован при дальнейшей обработке наблюдений.

Теоретический вывод критерия, предложенный Ф. Грабсом, менее сложен, чем у других авторов. Учитывая метод Грабса, мы вывели критерий оценки наибольшего результата серии наблюдений для случая, когда плотность вероятности определяется равенством $\varphi(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}}$, где α — положительное число.

Рассмотрим случай, когда x принимает только положительные значения. Тогда плотность вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, \qquad (1)$$

где $0 < x < +\infty$.

Пусть в результате измерения некоторой величины X получен ряд ее значений так, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Вероятность того, что X принимает значение в интервале $x_1 \div dx_1$ равна

$$\varphi(x_1)\,dx_1 = \frac{1}{\alpha}\,e^{-\frac{x_1}{\alpha}}\,dx_1.$$

Аналогичные равенства можно написать для всех значений X, и, наконец, вероятность того, что X принимает одно из значений промежутка $x_n \div dx_n$, равна $\frac{1}{\alpha}\,e^{-\frac{x_n}{\alpha}}\,dx_n$. Вероятность одновременного нахождения n независимых значений величины X в соответствующих промежутках определяется равенством

$$dF(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n!}{\alpha^n}\exp\left[-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]dx_1\,dx_2\ldots dx_n, \tag{2}$$

где $n!$ показывает, что порядок получения значений X не играет роли.

Представим сумму значений величины X как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x} = n\left[\frac{n-1}{n}\,\bar{x}_n + \frac{1}{n}\,x_n\right], \tag{3}$$

где $\bar{x}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$.

Путем алгебраических преобразований получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x} = \frac{n}{n-1}\,(x_n - \bar{x}) + \frac{n}{n-2}\,(x_{n-1} - \bar{x}_n) + \frac{n}{n-3}\,(x_{n-2} - \bar{x}_{n,\,n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{n}{2}\left(x_3 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) + \frac{n}{1}\left(x_2 - \frac{x_1 - x_2}{2}\right) + nx_1, \tag{4}$$

где $\bar{x}_{n,\,n-1} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} x_i$.

Аналогично определяются средние из $(n-k)$ значений величины X, где $k = 1, 2 \ldots, (n-2)$. Таким образом, сумма значений величины X представлена в (4) как сумма отклонений значений этой величины от указанных средних. Произведем замену переменных в равенстве (4). Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\,\alpha\eta_1 &= x_1,\\
\frac{1\cdot 2}{n}\,\alpha\eta_2 &= -x_1 + x_2,\\
\frac{2\cdot 3}{n}\,\alpha\eta_3 &= -x_1 - x_2 + 2x_3,\\
\frac{3\cdot 4}{n}\,\alpha\eta_4 &= -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
\frac{(n-2)(n-1)}{n}\,\alpha\eta_{n-1} &= -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_r - \ldots - x_{n-2} + (n-2)\,x_{n-1},\\
\frac{n(n-1)}{n}\,\alpha\eta_n &= -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_r - \ldots - x_{n-1} + (n-1)\,x_n.
\end{aligned}$$

Как следует из равенств (4) и (5), $\sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} \eta_i$.

Таким образом, преобразование (5) позволяет перейти к распределению разности между экстремальным и средним значением для случая n наблюдений и плотности вероятности вида (1).

Из равенства (2) получим вероятность одновременного нахождения значений величины η в соответствующих промежутках, учитывая, что модуль перехода к системе величин η $I = \frac{\alpha^n n!}{n^n}$.

После интегрирования η_1 от 0 до ∞, что соответствует пределам изменения x_1,

$$dF(\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n) = \frac{n!n!}{n^n} \exp\left[-\sum_{i=2}^{n} \eta_i\right] d\eta_2\, d\eta_3 \ldots d\eta_n. \tag{6}$$

В равенстве (6) η_i ограничено соотношениями $0 < \eta_2 < \infty$,

$$\frac{r}{r-2}\,\eta_r \geqslant \eta_{r-1}, \quad r = 3, 4, \ldots, n. \tag{7}$$

Равенство (7), полученное из (5), позволяет найти пределы изменения величины η_i. Так как

$$\frac{r(r-1)}{n}\,\alpha\eta_r = (r-1)\,x_r - \sum_{i=1}^{r-1} x_i = rx_r - \sum_{i=1}^{r} x_i, \tag{8}$$

то, поделив обе части равенства (8) на αr, получим

$$\frac{r-1}{n}\,\eta_r = \frac{x_r - \bar{x}}{\alpha} = U_r \quad \text{для } r \geqslant 3,$$

где U_r — разница между наибольшим и средним значениями из r наблюдений, выраженная в долях α.

Вероятность того, что $U_n \leqslant U$, обозначим $F_n(U) = \int_0^U dF(U_n)$.

Интегрируя U_n в соответствующих пределах, найдем вероятность отклонения экстремального результата от среднего для $n = 2, 3, \ldots$

Так,

$$F_2(U) = \int_0^U dF(U_2) = \frac{2!2!}{2^2} \int_0^U e^{-2U_2}\, 2dU_2 = \int_0^U e^{-x}\, dx.$$

$$F_3(U) = \int_0^U \int_0^{{}^3/_2 U_3} dF(U_2, U_3) = \frac{3!3!}{3^3} \int_0^U e^{-{}^3/_2 U_3} \frac{3}{2}\, dU_3 \int_0^{{}^3/_2 U_3} e^{-3U_2}\, 3dU_2 =$$

$$= \frac{2^2}{3} \int_0^U e^{-x}\, dx F_2\left(\frac{3}{2}x\right)$$

. . . . . .

$$F_n(U) = \frac{(n-1)^{n-1}(n-3)^{n-3}(n-5)^{n-5}\ldots}{n^{n-2}(n-2)^{n-4}(n-4)^{n-6}} \int_0^U e^{-x}\, dx F_{n-1}\left(\frac{n}{n-1}x\right).$$

Когда n — четное, последним множителем коэффициента у $F_n(U)$ является $\frac{3^3}{4^2}$, когда n — нечетное, последний множитель коэффициента $\frac{2^2}{3}$

Отметим связь между распределениями отклонений наибольшего значения от среднего всех n наблюдений и наибольшего от среднего значения оставшихся $(n-1)$ результатов (без наибольшего значения). Пусть

$$U_n = x_n - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\{(n-1)x_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n\},$$

$$V_n = x_n - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\{(n-1)x_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}\}.$$

Тогда $\frac{V_n}{U_n} = \frac{n}{n-1}$, $V_n = \frac{n}{n-1}U_n$, или $P(V_n \leqslant t_0) = P\left(\frac{n}{n-1}U_n \leqslant t_0\right) = P\left(U_n \leqslant \frac{n-1}{n}t_0\right)$.

Таким образом, распределение вероятности отклонения наибольшего значения от среднего из оставшихся может быть получено из распределения разности между наибольшим и средним из всех n наблюдений серии.

Найдем распределение статистики для оценки значимости наибольшего результата в случае n наблюдений, когда плотность вероятности задана равенством (1). Следуя методу, предложенному Ф. Грабсом, находим распределение статистики

$$\frac{S_n^2}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \leqslant K. \tag{9}$$

Возвращаясь к функции плотности вероятности (6), заменим систему величин η

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= r\sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_4 \sin\theta_3,\\
\eta_3 &= r\sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_4 \cos\theta_3,\\
\eta_4 &= r\sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_5 \cos\theta_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_{n-1} &= r\sin\theta_n \cos\theta_{n-1},\\
\eta_n &= r\cos\theta_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Как следует из работы Ф. Грабса [1950],

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}(x_n - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x}_n)^2. \tag{11}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1}(x_n - \bar{x})^2 + \frac{n-1}{n-2}(x_{n-1} - \bar{x}_n)^2 + \frac{n-2}{n-3}(x_{n-2} - \bar{x}_{n,\,n-1})^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{3}{2}\left(x_3 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + \frac{2}{1}\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2, \tag{12}$$

где $\bar{x}_{n,\,n-1} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}x_i$.

В нашем случае выражение для суммы квадратов отклонений результатов наблюдений от среднего получим из равенств (4) и 5), для чего возведем

в квадрат и умножим на соответствующие коэффициенты обе части равенства (5). Тогда

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\alpha^2}{n^2} [n(n-1)\eta_n^2 + (n-2)(n-1)\eta_{n-1}^2 +$$

$$+ (n-3)(n-2)\eta_{n-2}^2 + \ldots + 3 \cdot 2\eta_3^2 + 2\eta_2^2],$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{\alpha^2}{n^2} [(n-1)(n-2)\eta_{n-1}^2 +$$

$$+ (n-2)(n-3)\eta_{n-2}^2 + \ldots + 3 \cdot 2\eta_3^2 + 2\eta_2^2].$$

С учетом (10) запишем

$$\frac{S_n^2}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\sin^2\theta_n \cos^2\theta_{n-1} + (n-2)(n-3)\sin^2\theta_n \sin^2\theta_{n-1}\cos^2\theta_{n-2} + \ldots +}{n(n-1)\cos^2\theta_n + (n-1)(n-2)\sin^2\theta_n \cos^2\theta_{n-1} + \ldots +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ 2\sin^2\theta_n \ldots \sin^2\theta_4 \sin^2\theta_3}{+ 2\sin^2\theta_n \sin^2\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_4 \sin^2\theta_3}. \qquad (13)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению распределения величины θ. Перепишем (6) с учетом равенств (10) и того, что якобиан произведенной замены

$$r^{n-2} \sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \ldots \sin^3\theta_6 \sin^2\theta_5 \sin\theta_4.$$

Тогда

$$dF(r, \theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_4, \theta_3) = \frac{n!n!}{n^n} \exp[-r(\cos\theta_n + \sin\theta_n \cos\theta_{n-1} + \ldots +$$

$$+ \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_n \ldots \sin\theta_4 \sin\theta_3)] \times$$

$$\times r^{n-2} \sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \ldots \sin^3\theta_6 \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, dr \, d\theta_n \, d\theta_{n-1} \ldots d\theta_4 \, d\theta_3. \qquad (14)$$

Проинтегрируем равенство (14) по всем значениям r, учитывая, что $0 < r < \infty$. Тогда

$$dF(\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_4, \theta_3) = \frac{n!n!}{n^n} \sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \int_0^\infty e^{-ra} r^{n-2} \, dr, \qquad (15)$$

где

$$a = \cos\theta_n + \sin\theta_n \cos\theta_{n-1} + \ldots + \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_4 \sin\theta_3.$$

Интеграл в правой части равенства (15) берется по частям

$$\int_0^\infty e^{-ra} r^{n-2} \, dr = \frac{(n-2)!}{a^{n-1}}.$$

Тогда

$$dF(\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_4, \theta_3) = \frac{n!n!(n-2)!}{n^n} \times$$

$$\times \frac{\sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_n \, d\theta_{n-1} \ldots d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_n + \sin\theta_n \cos\theta_{n-1} + \ldots + \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_3)^{n-1}}. \qquad (16)$$

Из (10) следует, что

$$\frac{\eta_{r-1}}{\eta_r} = \frac{r \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_r \cos\theta_{r-1}}{r \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_{r+1} \cos\theta_r} = \operatorname{tg}\theta_r \cos\theta_{r-1}, \quad r \geqslant 4, \tag{17}$$

или

$$\operatorname{tg}\theta_r \leqslant \frac{r}{r-2} \sec\theta_{r-1}, \quad r \geqslant 4. \tag{18}$$

Согласно равенствам (7) и (17), при $r=3$ $\operatorname{tg}\theta_3 \leqslant 3$, откуда $\theta_3 \leqslant \operatorname{arctg} 3$.

Обозначим соответствующее равенству (18) значение θ_r через l_r. Тогда

$$l_r = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{r-2} \sec\theta_{r-1}\right). \tag{19}$$

Полагая $K_n = \dfrac{n!\,n!\,(n-2)!}{n^n}$ и учитывая соответствующие ограничения, получаем

$$K_n \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{l_4} \cdots \int_0^{l_{n-1}} \int_0^{l_n} \frac{\sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \ldots \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_n \, d\theta_{n-1} \ldots d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_n + \sin\theta_n \cos\theta_{n-1} + \ldots + \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_4 \sin\theta_3)^{n-1}} = 1. \tag{20}$$

Выражение (20) получено из (16) и равно 1 как вероятность всех возможных значений величины θ.

Теперь пусть $n=3$, тогда

$$K_3 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{d\theta_3}{(\cos\theta_3 + \sin\theta_3)^2} = 1,$$

$$P(\theta_3 \leqslant \theta) = K_3 \int_0^{\theta} \frac{d\theta_3}{(\cos\theta_3 + \sin\theta_3)^2}, \tag{21}$$

где θ изменяется от 0 до $M_3 = \operatorname{arctg} 3$.

При $n=4$

$$K_4 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{m_4} \frac{\sin\theta_4 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_4 + \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_4 \sin\theta_3)^3} +$$

$$+ K_4 \int_{m_4}^{M_4} \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\sin\theta_4 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_4 + \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_4 \sin\theta_3)^3} = 1, \tag{22}$$

где

$$m_4 = \operatorname{arctg}\frac{4}{2}, \quad M_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{2} \sec\theta_3\right), \quad L_4 = \operatorname{arcsec}\left(\frac{2}{4} \operatorname{tg}\theta_4\right).$$

$$(\theta_3 = \operatorname{arctg} 3)$$

Тогда

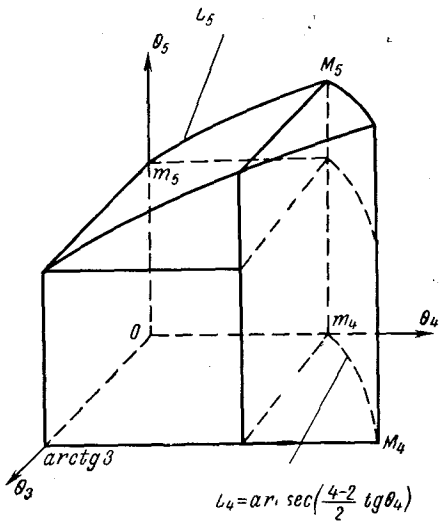
$$P(\theta_4 \leqslant \theta) = K_4 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{\theta} \frac{\sin\theta_4 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_4 + \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_4 \sin\theta_3)^3}, \tag{23}$$

если $0 \leqslant \theta \leqslant m_4 = \operatorname{arctg} \frac{4}{2}$,

$$P(\theta_4 \leqslant \theta) = K_4 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{m_4} \frac{\sin\theta_4 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_4 + \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_4 \sin\theta_3)^3} +$$

$$+ K_4 \int_{m_4}^{\theta} \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\sin\theta_4 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_4 + \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_4 \sin\theta_3)^3},$$

когда $m_4 = \operatorname{arctg} \frac{4}{2} \leqslant \theta \leqslant M_4 = \operatorname{arctg}(2 \sec\theta_3)$.



Пределы изменения переменных в равенстве (24).

При $n = 5$

$$K_5 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{m_4} \int_0^{m_5} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_4)^4} +$$

$$+ K_5 \int_0^{m_5} \int_{m_4}^{M_4} \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_3)^4} +$$

$$+ K_5 \int_{m_5}^{M_5} \int_{L_5}^{M_4} \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_3)^4} = 1. \quad (24)$$

Согласно рисунку

$$P(\theta_5 \leqslant \theta) = K_5 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{m_4} \int_0^{m_5} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_3)^4} +$$

$$+ K_5 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_{m_4}^{M_4} \int_0^{m_5} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_3)^4} +$$

$$+ K_5 \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \int_{L_5}^{M_4} \int_{m_5}^{\theta} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5 \cos\theta_4 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \cos\theta_3 + \sin\theta_5 \sin\theta_4 \sin\theta_3)^4},$$

где $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} = m_5 \leqslant \theta \leqslant M_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\sec\theta_4\right)$.

$$P(\theta_5 \leqslant \theta) = K_5 \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \int_0^{m_4} \int_0^{\theta} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5\cos\theta_4 + \sin\theta_5\sin\theta_4\cos\theta_3 + \sin\theta_5\sin\theta_4\sin\theta_3)^4} +$$

$$+ K_5 \int_{L_4}^{\operatorname{arctg} 3} \int_{m_4}^{M_4} \int_0^{\theta} \frac{\sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_5 \, d\theta_4 \, d\theta_3}{(\cos\theta_5 + \sin\theta_5\cos\theta_4 + \sin\theta_5\sin\theta_4\cos\theta_3 + \sin\theta_5\sin\theta_4\sin\theta_3)^4},$$

если $0 \leqslant \theta \leqslant m_5 = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; причем $L_4 = \operatorname{arcsec}\left(\frac{4-2}{2}\operatorname{tg}\theta_4\right)$ принимаем равным нулю, если $\theta_4 \leqslant m_4 = \operatorname{arctg}\frac{4}{2}$.

В общем случае n измерений вероятность того, что θ_n не превосходит некоторого значения θ, может быть определена по формуле

$$P(\theta_n \leqslant \theta) = K_n \int_0^{\theta} \int_0^{l_{n-1}} \cdots \int_0^{l_4} \int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{\sin^{n-3}\theta_n \sin^{n-4}\theta_{n-1} \cdots \times}{(\cos\theta_n + \sin\theta_n\cos\theta_{n-1} + \cdots +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times \sin^2\theta_5 \sin\theta_4 \, d\theta_n \, d\theta_{n-1} \cdots d\theta_4 \, d\theta_3}{+ \sin\theta_n \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_4 \sin\theta_3)^{n-1}},$$

где $l_r = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{r-2}\sec\theta_{r-1}\right)$.

Найдя таким образом распределение вероятностей θ_i, можно определить величину θ, отвечающую выбранным уровням вероятности, и вычислить значения принятого критерия.

ЛИТЕРАТУРА

Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. Мир, 1965.

Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1958.

Grubbs F. Annals of mathematical statistics, vol. 21, № 1—4, 1950.