Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.3

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ТИПА ИНТЕГРАТОРА

В. Г. Лабазин, О. И. Янушевский

Интеграторы находят широкое применение во многих современных устройствах автоматики и счетно-решающей техники. Они используются, в частности, для определения координат местоположения некоторого объекта, если известна скорость его движения. Нередко характерным входным сигналом динамической системы, или одной из его составляющих, является случайный процесс. Тогда на выходе действует также случайный процесс, параметры которого надо определить. К постановке такой задачи приходим, в частности, при определении случайной составляющей ошибки на выходе интегрирующего привода.

Общий ход решения поставленной задачи известен *. Пусть имеется динамическая система с передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{K}{p}, \tag{1}$$

где K — коэффициент передачи системы; p — оператор Лапласа.

Случайный процесс $X(t)$ на входе задан своими математическим ожиданием $M_x(t)$ и корреляционной функцией $K_y(t, t')$. В этом случае математическое ожидание $M_y(t)$ и корреляционная функция $K_y(t,t')$ случайного процесса $Y(t)$ на выходе системы определяется на основании выражений

$$M_y(t) = \int_0^t M_x(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} K_x(\tau, \tau')\, d\tau\, d\tau', \tag{3}$$

где τ и τ' — переменные интегрирования, определяющие время; t и t' — переменные верхние пределы интегрирования.

С расчетной точки зрения нахождение второго интеграла в каждом отдельном случае много сложнее, чем определение математического ожидания на выходе системы. В большинстве прикладных задач приходится иметь дело со стационарным случайным процессом на входе. Поэтому без большого ущерба для общности дальнейших рассуждений будем считать, что на входе интегратора действует стационарный случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю.

---

* Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. Физматгиз, 1958.
А. С. Немировский. Интеграторы измерительных приборов. Стандартгиз, 1960.

Рассмотрим частный случай, когда случайный процесс на входе системы задан корреляционной функцией вида

$$K_x(t, t') = D_x e^{-a(t'-t)^2}, \tag{4}$$

где t и t' — координаты, определяющие время; $Д_x$ — дисперсия процесса на входе системы; a — коэффициент, определяющий глубину корреляционной связи.

Выражение (4) часто встречается в прикладных задачах и определяет стационарный случайный процесс. Вычисление математического ожидания на выходе системы по формуле (2), очевидно, не вызывает принципиальных трудностей. Поэтому без нарушения общности задачи положим $M_x(\tau) = 0$. Заметим, что это условие в реальных конструкциях достигается начальной настройкой системы.

Корреляционную функцию на выходе системы определим, подставив (4) в (3)

$$K_y(t, t') = D_x \int_0^t \int_0^{t'} e^{-a(\tau'-\tau)^2} d\tau\, d\tau'. \tag{5}$$

В результате интегрирования по τ' получим

$$K_y(t, t') = D_x \int_0^t \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k!(2k+1)} \left[(t'-\tau)^{2k+1} + \tau^{2k+1}\right] d\tau. \tag{6}$$

Вычисление второго интеграла приводит к выражению, которое является окончательным для определения $K_y(t, t')$

$$K_y(t, t') = \frac{D_x}{2} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{(k+1)!(2k+1)} \left[t^{2(k+1)} + t'^{2(k+1)} - (t'-t)^{2(k+1)}\right]. \tag{7}$$

Математическое ожидание случайного процесса на выходе интегратора в соответствии с принятыми исходными данными равняется нулю. Из выражения (7) следует, что случайный процесс на выходе системы превращается в нестационарный. Действительно, корреляционная функция зависит не только от моментов времени, в которые измеряется случайный процесс, но и от их разности. Выражение (7) обладает сложной структурой, и его использование в расчетах затруднено. Для многих приложений достаточно знать дисперсию случайного процесса, которую определим из (7), положив $t' = t$

$$D_y(t) = D_x \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{(k+1)!(2k+1)} t^{2(k+1)}. \tag{8}$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду, более удобному для анализа,

$$D_y(t) = D_x t \int_0^t \frac{1 - e^{-t^2 a}}{t^2 a} dt. \tag{9}$$

Наконец, используя интеграл вероятности, который является табулированной функцией, переходим к выражению для дисперсии случайного процесса на выходе интегратора в форме, наиболее удобной для анализа и расчетов,

$$D_y(t) = D_x 2t \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Phi\left(t\sqrt{2a}\right) - D_x \frac{1}{a}\left(1 - e^{-t^2 a}\right), \tag{10}$$

где $\Phi(t)$ — интеграл вероятности,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Кривая (10) является возрастающей функцией времени и приближается при $t \to \infty$ к асимптоте (рис. 1), определяемой выражением

$$D_y(t)|_{t\to\infty} = D_x\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,t - \frac{1}{a}\right). \qquad (11)$$

Интересно отметить, что при стационарном входном случайном процессе дисперсия на выходе интегратора зависит от времени.

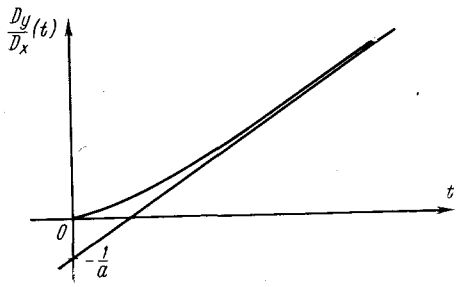


Рис. 1. График зависимости дисперсии случайного процесса на выходе интегратора от времени.

Рассмотрим один из возможных вариантов технической реализации интегратора и покажем, как можно использовать полученные ранее результаты в приложении к конкретной задаче. Интегрирующий привод (рис. 2) является следящей системой воспроизведения скорости вращения и в настоящее время широко используется в счетно-решающей технике для точного интегрирования меняющихся во времени величин. Входным сигналом, подлежащим интегрированию, является напряжение $U_{вх}(t)$. Это напряжение сравнивается на входе системы с напряжением обратной связи $U_{вых}(t)$, которое вырабатывается тахогенератором $ТГ$, связанным с валом двигателя $Д$. Сигнал рассогласования $\Delta U(t) = U_{вх}(t) - U_{вых}(t)$ усиливается по напряжению и по мощности усилителем G, выходной сигнал которого U_y

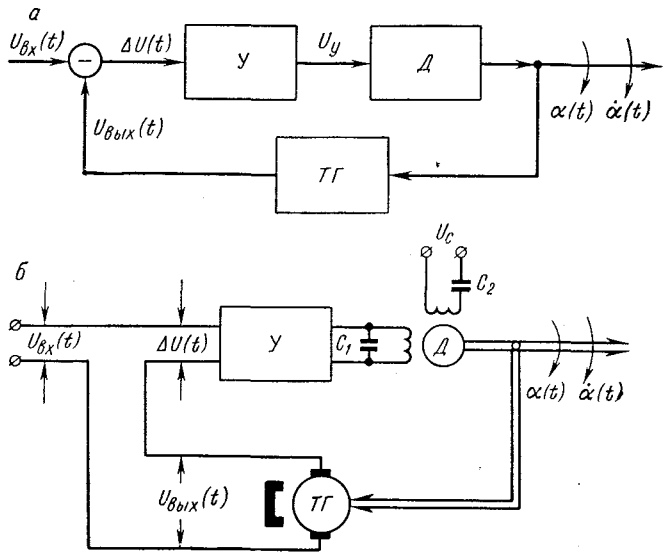


Рис. 2. Схема интегрирующего привода: *а* — структурная, *б* — электрическая.

приводит двигатель $Д$ во вращение. Выходным сигналом (интегралом от входной величины) всего устройства является угол поворота вала двигателя $\alpha(t)$.

Основной характеристикой интегрирующего привода является зависимость $\dot{\alpha} = f(U_{вх})$, где $\dot{\alpha}$ — скорость вращения вала двигателя. В идеальном случае эта характеристика является прямой линией. Точность работы такого интегратора определяется в основном линейностью и стабильностью во времени характеристики тахогенератора $ТГ$, включенного в цепь отрицательной

обратной связи системы, и оценивается для наиболее точных устройств величиной 0,1—0,2% при максимальной скорости вращения двигателя 4000—6000 *об/мин*. Чтобы объяснить процесс интегрирования, можно записать

$$\alpha(t) = \int_0^t \dot{\alpha}(t)\, dt. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$U_{\text{вых}}(t) = k_{\text{т}}\dot{\alpha}(t), \tag{13}$$

где $k_{\text{т}}$ — коэффициент передачи тахогенератора *ТГ*.

Согласно принципу действия системы величина $\Delta U(t)$ мала (обычно $\Delta U(t)/U_{\text{вых}}(t) \leqslant 10^{-3}$). Поэтому с точностью до величины ошибки системы можно положить

$$U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t). \tag{14}$$

Окончательно с учетом (12), (13) и (14) имеем

$$\alpha(t) = \frac{1}{k_{\text{т}}} \int_0^t U_{\text{вх}}(t)\, dt. \tag{15}$$

Таким образом, угол поворота вала двигателя $\alpha(t)$ в некотором масштабе, действительно, является интегралом от входного сигнала системы $U_{\text{вх}} = (t)$. На практике величину угла отсчитывают по шкалам, которые связаны с двигателем через масштабирующий редуктор, либо преобразуют специальным датчиком угла в электрическую величину для использования в последующих преобразованиях.

Входной сигнал (рис. 2, *а*) подается на постоянном токе (т. е. без модуляции). На выходе усилителя действует сигнал на несущей частоте, так как преимущественное распространение в этих схемах получили бесколлекторные двигатели переменного тока. При таком построении схемы усилитель, очевидно, содержит в своем тракте модулятор. Конденсаторы C_1 и C_2 предназначены для обеспечения оптимального режима работы двигателя *Д*. Обмотка возбуждения двигателя питается непосредственно от сети $U_{\text{с}}$.

Ошибка интегрирующего привода содержит регулярную и случайную составляющие, которые легко могут быть определены по отклонению измеренной скорости вращения от ее расчетного значения. Иначе говоря, ошибка интегрирующего привода задается как ошибка его скорости $\dot{\alpha}(t)$. Регулярная ошибка принципиально может быть скомпенсирована в системе, поэтому несколько подробнее остановимся на рассмотрении случайной составляющей ошибки. Для некоторого диапазона скоростей вращения можно принять, что абсолютная ошибка $\Delta\dot{\alpha}(t)$ не зависит от скорости вращения интегрирующего привода.

Представим действительное значение интеграла как сумму расчетного значения и ошибки

$$\alpha_{\text{д}}(t) = \alpha_{\text{р}}(t) + \Delta\alpha(t). \tag{16}$$

Аналогично записываем для скорости

$$\dot{\alpha}_{\text{д}}(t) = \dot{\alpha}_{\text{р}}(t) + \Delta\dot{\alpha}(t). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (12), получим

$$\alpha_{\text{д}}(t) = \int_0^t \dot{\alpha}_{\text{р}}(t)\, dt + \int_0^t \Delta\dot{\alpha}(t)\, dt. \tag{18}$$

Сравнивая (16) и (18), имеем

$$\alpha_{\text{р}}(t) = \int_0^t \dot{\alpha}_{\text{р}}(t)\, dt, \tag{19}$$

$$\Delta\alpha(t) = \int_0^t \Delta\dot{\alpha}(t)\, dt. \tag{20}$$

Функция $\Delta\dot{\alpha}(t)$ определена как характеризующая случайный процесс. Таким образом, нахождение случайной составляющей ошибки в интеграле $\Delta\alpha(t)$ сводится к задаче интегрирования случайного процесса, который представлен случайной ошибкой по скорости $\Delta\dot{\alpha}(t)$.

Будем считать, что функция $\Delta\dot{\alpha}(t)$ характеризует стационарный случайный процесс с математическим ожиданием, равным нулю ($M_x(t) = 0$). Зададимся величинами $D_x = \sigma_x^2 = 100$ *об*^{2}/*мин*^{2} и $a = 100$ ^{1}/*мин*^{2}.

Тогда корреляционная функция (4) перепишется в виде

$$K_x(t, t') = 100e^{-100(t'-t)^2}, \tag{21}$$

а дисперсия $D_y(t)$ на выходе интегратора определится выражением

$$D_y(t) = 1{,}25\left(t\sqrt{2a}\right)\Phi\left(t\sqrt{2a}\right) + e^{-\frac{(t\sqrt{2a})^2}{2}} - 1. \tag{22}$$

Таким образом, вероятная ошибка в интеграле зависит от времени интегрирования и может быть определена в каждый момент времени через известное значение стандарта $\sigma_y(t)$, связанного с дисперсией соотношением $D_y(t) = \sigma_y^2(t)$.