

УДК 522.75

ОПТИМАЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

О. Н. Тихонов

Не существует оптимального (в смысле среднеквадратичной погрешности) интервала $T_{\text{опт}}$ интерполяции по одной, двум, трем и т. д. равностоящим на T ординатам «чистого» сигнала $x(t)$. Чем меньше T , тем меньше средний квадрат погрешности*. Если к сигналу добавлена помеха $n(t)$, то для одно-точечной (ступенчатой) интерполяции $T_{\text{опт}}$ также не существует ни при каких сочетаниях $x(t)$ и $n(t)$. Однако уже при двухточечной (линейной) интерполяции интервал $T_{\text{опт}}$, дающий минимум среднеквадратичной погрешности, существует, и линейная интерполяция дискретных измерений может быть точнее, чем непрерывные измерения. При этом линейная упреждающая экстраполяция не повышает точности.

Линейная экстраполяция или интерполяция по двум ординатам дает результат

$$x_{\text{ант}}'(t) = x(t - \tau) + \frac{T}{\tau} [x(t - \tau) - x(t - T - \tau)], \quad (1)$$

где t — текущее время, упреждающее на τ последнюю из двух ординат $x(t - \tau)$; первая ордината равна $x(t - T - \tau)$.

При $0 < \tau < T$ имеем экстраполяцию в наступающем интервале, а при $-T < \tau < 0$ — интерполяцию в прошедшем интервале.

Оператор Лапласа преобразования (1) имеет вид

$$W(j\omega) = \left(1 + \frac{\tau}{T} - \frac{\tau}{T} e^{-Tj\omega}\right) e^{-\tau j\omega}. \quad (2)$$

Этот же оператор относится к помехе $n(t)$.

Желаемый результат измерений в момент t равен $x(t)$ и, следовательно, желаемый оператор, действующий на сигнал, равен

$$W_{\text{ж}}(j\omega) = 1. \quad (3)$$

Для оценки среднего по ансамблю $x(t) + n(t)$ квадрата погрешности характеризуют и сигнал и помеху спектральными плотностями $S_x(\omega)$ и $S_n(\omega)$ или корреляционными функциями $R_x(\tau)$ и $R_n(\tau)$.

Средний квадрат погрешности оператора (2) против желаемого оператора (3) равен**

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\tau) = \varepsilon_x^2(\tau) + \varepsilon_n^2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega) - W_{\text{ж}}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

* Gardenhire L. W. I. S. A. J., № 4, 1964.

** Г. Б о д е, К. Ш е н н о н. Упрощенное изложение линейной минимально-квадратичной теории сглаживания и предсказания. В сб. Теория информации и ее приложения. Физматгиз, 1959.

После преобразования получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^2(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{\tau}{T} - \frac{\tau}{T} e^{-Tj\omega} \right) e^{-\tau j\omega} - 1 \right|^2 S_x(\omega) d\omega = \\ &= \left[1 + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 + \left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 \right] R_x(0) - 2 \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) \frac{\tau}{T} R_x(T) + \\ &\quad + 2 \frac{\tau}{T} R_x(\tau + T) - 2 \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) R_x(\tau); \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^2(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(1 + \frac{\tau}{T} - \frac{\tau}{T} e^{-Tj\omega} \right) e^{-\tau j\omega} \right|^2 S_n(\omega) d\omega = \\ &= \left[\left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \right] R_n(0) - 2 \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) \frac{\tau}{T} R_n(T). \quad (6)\end{aligned}$$

При фиксированном τ величины (5) и (6) оценивают средний квадрат погрешности по ансамблю лишь для фиксированных моментов времени, расположенных между равностоящими на интервал T узлами. Усредняя их на интервале T , получим

$$\bar{\varepsilon}_{\text{уп}}^2(T) = \frac{1}{T} \int_0^T [\varepsilon_x^2(\tau) + \varepsilon_n^2(\tau)] d\tau. \quad (7)$$

Эта величина — средний квадрат погрешности экстраполяции на упреждающем интервале, а для интерполяции на прошедшем интервале

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ит}}^2(T) = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 [\varepsilon_x^2(\tau) + \varepsilon_n^2(\tau)] d\tau. \quad (8)$$

Погрешность за счет ослабления мощности сигнала при интерполяции равна

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^0 \varepsilon_x^2(\tau) d\tau = \frac{5}{3} R_x(0) + \frac{1}{3} R_x(T) - \frac{4}{T} \int_0^T R_x(\tau) d\tau + \frac{4}{T^2} \int_0^T \tau R_x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Она монотонно возрастает от 0 до $R_x(0)$ с ростом интервала T от 0 и выше.

Рассмотрим погрешность от помехи. При экстраполяции согласно (6) и (7) получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_n^2(\tau) d\tau &= \frac{1}{T} \left\{ R_n(0) \int_0^T \left[\left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{T} \right)^2 \right] d\tau \right\} - \\ &- \frac{1}{T} \left\{ 2R_n(T) \int_0^T \left(1 + \frac{\tau}{T} \right) \frac{\tau}{T} d\tau \right\} = \frac{8}{3} R_n(0) - \frac{5}{3} R_n(T). \quad (10)\end{aligned}$$

Величина (10) с ростом T от 0 и выше для любых $n(t)$ возрастает от $R_n(0)$ до $\frac{8}{3} R_n(0)$.

Таким образом, суммарная погрешность $\bar{\varepsilon}_{\text{уп}}^2$ при экстраполяции любых $x(t) + n(t)$ с ростом T возрастает. Оптимальной экстраполяции не существует.

При интерполяции согласно (6) и (8) получим

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^0 \varepsilon_n^2(\tau) d\tau = \frac{2}{3} R_n(0) + \frac{1}{3} R_n(\tau), \quad (11)$$

т. е. здесь с ростом T погрешность от помехи уменьшается, от $R_n(0)$ до $\frac{2}{3}R_n(0)$. Поэтому суммарная погрешность (8) для определенных сочетаний $x(t) + n(t)$ может при некотором $T_{\text{опт}}$ минимизироваться и быть меньше погрешности непрерывных измерений при $T = 0$, т. е. может существовать оптимальная интерполяция.

Перейдем к выяснению условий существования $T_{\text{опт}}$ при линейной интерполяции. Если $\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T)}{\partial T} \Big|_{T=0^+} < 0$ или

$$\frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T)}{\partial T^2} \Big|_{T=0^+} < 0 \quad \left(\text{при} \quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T)}{\partial T} \Big|_{T=0^+} = 0 \right), \quad (12)$$

то $T_{\text{опт}}$ существует. Приведем эти условия к более удобной форме. Найдём из (11)

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_n^2(T)}{\partial T} \Big|_{T=0^+} = \frac{1}{3} R'_n(0^+); \quad \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_n^2(T)}{\partial T^2} \Big|_{T=0^+} = \frac{1}{3} R''_n(0^+). \quad (13)$$

Определим из (9) с применением правила дифференцирования интеграла по параметру

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_x^2(T)}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{5}{3} R_x(0) + \frac{1}{3} R_x(T) - \frac{4}{T} \int_0^T R_x(\tau) d\tau + \frac{4}{T^2} \int_0^T \tau R_x(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{3} R'_x(T) + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \left[-\frac{4}{T} R_x(\tau) \right] d\tau - \frac{4}{T} R_x(T) + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{4}{T^2} \tau R_x(\tau) \right] d\tau + \frac{4}{T^2} T R_x(T). \end{aligned}$$

Раскладывая $R(\tau)$ в ряд, интегрируя и устремляя $T \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_x^2(T)}{\partial T} \Big|_{T=0^+} = -\frac{1}{3} R'_x(0^+). \quad (14)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_x^2(T)}{\partial T^2} &= \frac{1}{3} R''_x(T) + \int_0^T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[-\frac{4}{T} R_x(\tau) \right] d\tau + \frac{4}{T^2} R_x(T) + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[\frac{4}{T^2} \tau R_x(\tau) \right] d\tau - \frac{8}{T^3} T R_x(T) \Big|_{T=0} = -\frac{1}{3} R''_x(0^+). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (13), (14), (15) условия (12) существования оптимальной линейной интерполяции приобретают вид

$$R'_n(0^+) - R'_x(0^+) < 0, \quad (16)$$

или

$$R''_n(0^+) - R''_x(0^+) < 0 \quad \text{при} \quad R'_n(0^+) - R'_x(0^+) = 0,$$

где $R'(0^+) = \frac{dR(\tau)}{d\tau}$, $R''(0^+) = \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}$ при $\tau = 0^+$.

Когда для заданных $R_n(\tau)$ и $R_x(\tau)$ существование $T_{\text{опт}}$ установлено, вычисление $T_{\text{опт}}$ можно произвести из уравнения

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2}{\partial T} = \frac{1}{3} R'_n(T) + \frac{1}{3} R'_x(T) + \frac{4}{T^2} \int_0^T R_x(\tau) d\tau - \frac{8}{T^3} \int_0^T \tau R_x(\tau) d\tau = 0. \quad (17)$$

Пример. Для $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta^2 \tau^2}$, $R_n(\tau) = \sigma_n^2 e^{-\alpha |\tau|}$ имеем $R'_x(0^+) = 0$, $R'_n(0^+) = -\sigma_n^2 \alpha$ и условие (16), т. е. $0 - \sigma_n^2 \alpha < 0$ выполняется при любых значениях статистических параметров сигнала и помехи. Для $\sigma_x^2 = 1,0$ (ед)²; $\sigma_n^2 = 0,5$ (ед)²; $\beta = 1 \frac{\text{рад}}{\text{ед. времени}}$; $\alpha = 1,5 \frac{\text{рад}}{\text{ед. времени}}$; величина $\bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2$ равна согласно (9) и (11)

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T) &= \frac{5}{3} \sigma_x^2 + \frac{1}{3} \sigma_x^2 e^{-\beta^2 T^2} - \frac{4}{T} \int_0^T \sigma_x^2 e^{-\beta^2 \tau^2} d\tau + \frac{4}{T^2} \int_0^T \tau \sigma_x^2 e^{-\beta^2 \tau^2} d\tau + \frac{2}{3} \sigma_n^2 + \frac{1}{3} \sigma_n^2 e^{-\alpha T} = \\ &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3} e^{-T^2} - \frac{4}{T} \int_0^T e^{-\tau^2} d\tau + \frac{2}{T^2} (1 - e^{-T^2}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{-1,5T}. \end{aligned}$$

Соответствующая таблица функции $\bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T)$ показывает, что при $T = T_{\text{опт}} = 0,75$ ед. времени получается минимум погрешности линейной интерполяции. Средний квадрат погрешности снижается на 11,6% против непрерывного представления процесса $x(t) + n(t)$ при $T = 0$:

T , ед. времени	0	0,5	1,0	2,0	5,0	1,0	∞
$\bar{\varepsilon}_x^2(T)$, (ед) ²	0	0,03	0,072	0,4	0,97	1,32	1,667
$\bar{\varepsilon}_n^2(T)$, (ед) ²	0,5	0,412	0,37	0,341	0,337	0,334	0,333
$\bar{\varepsilon}_{\text{инт}}^2(T) = \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_n^2$, (ед) ²	0,5	0,442	0,442	0,741	1,307	1,654	2,00