Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 513.59 : 517.566

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ КВАДРАТУР

А. М. Журавский, А. А. Кржижановская

Проблема приближенных квадратур является одной из наиболее изученных в анализе. Возникшая из потребностей вычислений, связанных с решением разнообразных прикладных задач, она получила широчайшее развитие и стала предметом многочисленных исследований. Работы в этой области исчерпывающи, однако изучение внешнего мира ставит новые задачи там, где, казалось бы, все известно. Примером может служить формула приближенной квадратуры для сложной функции $F(y_1, \ldots, y_n)$

$$\int_a^b F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,dx \approx (b-a)\,F\left(\frac{\varphi_1(a)+\varphi_1(b)}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n(a)+\varphi_n(b)}{2}\right), \quad (1)$$

где

$$y_k = \varphi_k(x); \quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

Формула (1) выдвинута на основе измерения искривления буровых скважин и получила широкое распространение в отечественной и мировой практике буровых работ при $n = 1{,}2$ для частных форм функций $F(y_1, \ldots, y_n)$ и $\varphi_k(x)$ [Ушаков, 1962; Якоби, 1938; Peterson, 1922]. Вопрос об оценке погрешности формулы (1) до сих пор остается открытым. Цель настоящей статьи — восполнить этот пробел и указать выражение остаточного члена формулы

$$\int_a^b F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,dx = (b-a)\,F\left(\frac{\varphi_1(a)+\varphi_1(b)}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n(a)+\varphi_n(b)}{2}\right) + R. \quad (3)$$

Функция $\varphi_k(x)$ в промежутке (a, b) может быть линейно аппроксимирована выражением

$$P_k(x) = \frac{\varphi_k(a)+\varphi_k(b)}{2} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{\varphi_k(b)-\varphi_k(a)}{b-a}. \quad (4)$$

Линейная функция $P_k(x)$ на границах промежутка принимает значения

$$P_k(a) = \varphi_k(a), \quad P_k(b) = \varphi_k(b). \quad (5)$$

Остаточный член $R_k(x)$ равенства

$$\varphi_k(x) = P_k(x) + R_k(x) \quad (6)$$

для дважды дифференцируемой функции $\varphi_k(x)$ выражается формулой

$$R_k(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}\varphi_k''(x_k^*), \quad (7)$$

где x_k^* — некоторое значение в промежутке (a, b).

Положив для краткости

$$m_k = \frac{1}{2}\left[\varphi_k(b) + \varphi_k(a)\right], \tag{8}$$

$$\Delta_k = \frac{1}{b-a}\left[\varphi_k(b) - \varphi_k(a)\right], \tag{9}$$

перепишем равенство (6) в виде

$$\varphi_k(x) = m_k + H_k, \tag{10}$$

где

$$H_k = (x-c)\,\Delta_k + R_k(x), \qquad c = \frac{a+b}{2}. \tag{11}$$

Согласно формуле Тейлора

$$F(m_1+H_1, \ldots, m_n+H_n) = F(m_1, \ldots, m_n) + \sum_{k=1}^{n} H_k F'_k(m_1, \ldots, m_n) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_k H_i F''_{k,\,i}(m_1^*, \ldots, m_n^*),$$

где $F'_k(y_1, \ldots, y_n)$ — частная производная по y_k; $F''_{i,\,k}(y_1, \ldots, y_n)$ — частная производная по y_i и y_k и $m_k^* = \varphi_k(x_k^{**})$, $a < x_k^{**} < b$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Интеграл

$$\int_a^b F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,dx = (b-a)\,F(m_1, \ldots, m_n) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} F'_k(m_1, \ldots, m_n)\int_a^b H_k\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b H_i H_k F''_{i,\,k}(m_1^*, \ldots, m_n^*)\,dx. \tag{13}$$

Сравнение равенств (3) и (13) показывает, что остаточный член

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_{i,\,k}, \tag{14}$$

где

$$R_k = F'_k(m_1, \ldots, m_n)\int_a^b H_k\,dx, \tag{15}$$

$$R_{i,\,k} = \int_a^b H_i H_k F''_{i,\,k}(m_1^*, \ldots, m_n^*)\,dx. \tag{16}$$

Интеграл

$$\int_a^b H_k\,dx = \Delta_k\int_a^b (x-c)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\varphi''_k(x_k^*)\,dx. \tag{17}$$

Первый интеграл в правой части (17)

$$\int_a^b (x-c)\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{-1}^{+1} t\,dt = 0. \tag{18}$$

Второй интеграл

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,\varphi''_k(x_k^*)\,dx = \varphi''_k(\tilde{x}_k)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx, \tag{19}$$

где $a < \tilde{x}_k < b$.

В силу равенства

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} (t^2-1)\,dt = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

из (17), (18) и (19) следует

$$\int_a^b H_k\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12}\,\varphi_k''(\bar{x}_k). \tag{20}$$

Отсюда согласно (15)

$$R_k = -\frac{(b-a)^3}{12}\,F_k'(m_1, \ldots, m_n)\,\varphi_k''(\bar{x}_k). \tag{21}$$

При рассмотрении R_{ik} следует учесть, что

$$H_i H_k = (x-c)^2\,\Delta_i\,\Delta_k + (x-c)\{\Delta_i R_k(x) + \Delta_k R_i\} + R_i(x)\,R_k(x). \tag{22}$$

Согласно (16), (6) и (22)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} = \int_a^b (x-c)^2\,\Phi_1(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,\Phi_2(x)\,dx + \frac{1}{4}\int (x-a)^2(x-b)^2\,\Phi_3(x)\,dx, \tag{23}$$

где

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Delta_i\,\Delta_k F_{ik}''(m_1^*, \ldots, m_n^*), \tag{24}$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \{\Delta_i \varphi_k''(x_k^*) + \Delta_k \varphi_i''(x_i^*)\}\,F_{ik}''(m_1^*, \ldots, m_n^*), \tag{25}$$

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_i''(x_i^*)\,\varphi_k''(x_k^*)\,F_{ik}''(m_1^*, \ldots, m_n^*). \tag{26}$$

Из равенства (23), повторяя рассуждения, приводящие к (21), легко получить

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} = \frac{(b-a)^3}{12}\,\Phi_1(x') + \frac{(b-a)^4}{64}\,\Phi_2(x'') + \frac{(b-a)^5}{30}\,\Phi_3(x'''), \tag{27}$$

где $a < x' < b$, $a < x'' < b$, $a < x''' < b$.

Остаточный член формулы приближенных квадратур (14), (21) и (27) представляется в виде

$$R = \frac{(b-a)^3}{24}\{S_1 - 2T\} + \frac{(b-a)^4}{123}\,S_2 + \frac{(b-a)^5}{60}\,S_3, \tag{28}$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Delta_i\,\Delta_k F_{ik}''(m_1', \ldots, m_n'),\quad m_l' = \varphi_l(x_l'),\quad a < x_l' < b, \tag{29}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [\{\Delta_i \varphi_k''(\bar{x}_k') - \Delta_k \varphi_i''(\bar{x}_i')\}\,F_{ik}''(m_1'', \ldots, m_n'') + \tag{30}$$

$$+ \{\Delta_i \varphi_k''(\bar{x}_k'') + \Delta_k \varphi_i''(\bar{x}_i'')\}\,F_{ik}''(\bar{m}_1'', \ldots, \bar{m}_n'')],$$

$$m_l'' = \varphi_l(x_l''),\quad a < x_l'' < b;$$

$$\bar{\bar{m}}''_l = \varphi''_l(\bar{\bar{x}}''_l), \quad a < \bar{\bar{x}}''_l < b; \quad a < \overset{\sim}{\bar{\bar{x}}}'_l < b, \quad a < \overset{\sim}{\bar{\bar{x}}}'_l < b,$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi''_i(\overset{\sim}{\bar{\bar{x}}}'''_i)\,\varphi''_k(\overset{\sim}{\bar{\bar{x}}}'''_k)\,F''_{ik}(m'''_1, \ldots, m'''_n);$$

$$m'''_l = \varphi_l(x'''_l), \quad a < x'''_l < b; \quad a < \overset{\sim}{\bar{\bar{x}}}'''_l < b, \tag{31}$$

$$T = \sum_{k=1}^{n} \varphi''_k(\bar{\bar{x}}_k)\,F'_k(m_1, \ldots, m_n),$$

$$m_l = \varphi_l(x_l), \quad a < x_l < b. \tag{32}$$

В частном случае, когда $\varphi_k(x) = p_k x + q_k$, $k = 1, \ldots, n$, остаточный член

$$R = \frac{(b-a)^3}{24} S_1, \tag{33}$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_i p_k F_{ik}(m'_1, \ldots, m'_n). \tag{34}$$

При $n = 1$ остаточный член формулы квадратур

$$\int_a^b F(\varphi(x))\,dx = (b-a)F\left[\frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b_1))\right] + R \tag{35}$$

выражается равенством

$$R = \frac{(b-a)^3}{24}\{\Delta^2 F''(\varphi(x')) - 2\varphi''(\bar{x})\,F'(m)\}, \tag{36}$$

где x', $\bar{x}$ — некоторые значения x в промежутке (a, b); $m = \frac{1}{2}(\varphi(a) + \varphi(b))$.

В том случае, когда $\varphi(x) = px + q$, остаточный член

$$R = \frac{(b-a)^3}{24} p^2 F''(\varphi(x')). \tag{37}$$

При $p = 1$, $q = 0$ равенство (35) представляет формулу квадратур, известную под названием формулы средних прямоугольников

$$\int_a^b F(x)\,dx = (b-a)\,F\left(\frac{a+b}{2}\right) + R$$

с остаточным членом $R = \frac{(b-a)^3}{24} F''(x')$.

Выражение остаточного члена, доставляемое равенством (28), позволяет оценить точность приближенной формулы (1). Полагая

$$|\varphi''_k(x)| \leqslant \mu_k, \quad a < x < b;$$

$$|F''_{ik}(y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M_{ik},$$

при $y_s = \varphi_s(x)$, $s = 1, \ldots, n$, $a \leqslant x \leqslant b$, получаем из (29), (30), (31) и (32) неравенства

$$|S_1| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\Delta_i|\,|\Delta_k|\,M_{ik} = S_1^*;$$

$$|S_2| \leqslant 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\Delta|_i \mu_k M_{ik} = S_2^*;$$

$$|S_3| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_i \mu_k M_{ik} = S_3^*;$$

$$|T| \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k \mu_k = T^*,$$

где $A_k = |F'_k(m_1, \ldots, m_n)|$.

Из (28) следует, что

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24} \{S_1^* + 2T^*\} + \frac{(b-a)^4}{128} S_2^* + \frac{(b-a)^5}{60} S_3^*. \qquad (38)$$

Часто функции $\varphi_k = (x)$ даются таблично для ряда последовательных значений аргумента. В таких случаях верхние границы $|\varphi''_k(x)|$ могут быть указаны лишь приближенно. Для M_{ik} удается установить только верхнюю границу, соответствующую рассматриваемой области изменения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Значения μ_k определяются равенствами $\mu_k = \frac{1}{2} \max |\Delta^2 \varphi_k| : h^2$, где $\max |\Delta^2 \varphi_k|$ — наибольшее значение $|\Delta^2 \varphi_k|$ по таблице разностей; h — табличный шаг.

ЛИТЕРАТУРА

Ушаков Н. И. Горная геометрия. Госгортехиздат, 1962.

Якоби Н. О. Методы, приборы и служба исследования буровых скважин. ОНТИ, 1938.

Peterson W. Jerukontoret Annaler. May 31, 1922.