Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 512.37

О БЫСТРОМ ВЫЧИСЛЕНИИ НАИБОЛЬШИХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

О. Н. Тихонов

Можно показать, что известный алгоритм Ньютона $\alpha_i = \alpha_i^* - \Delta$, служащий для уточнения корня многочлена, является представителем родственной группы алгоритмов (здесь α_i^*, α_i — соответственно приближенное и уточненное значения корня; $\Delta = \frac{f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}$ — аддитивная поправка, равная длине подкасательной к кривой $f(x)$ в точке $x = \alpha_i^*$). Другим представителем этой группы будет алгоритм

$$\alpha_i = \alpha_i^* \left[1 + \frac{\Delta}{(n-1)\Delta - \alpha_i^*}\right] = \alpha_i^* \left(1 + \frac{1}{n - 1 - \frac{\alpha_i^*}{\Delta}}\right) = \alpha_i^* (1 + \mu).$$

Такие алгоритмы отличаются тем, что поправка к уточняемому корню носит мультипликативный характер, т. е. является тем большей, чем больше уточняемый корень. Большим по модулю корням придается больший вес. Поэтому при вычислении наибольших корней уравнения они дают сходимость более быструю, чем алгоритм Ньютона.

Прежде чем переходить к описанию методики получения таких алгоритмов, следует на численных примерах рассмотреть практические их преимущества. Для этого возьмем уравнение

$$f(x) = x^5 + 8{,}1x^4 + 0{,}7x^3 - 50{,}7x^2 - 5{,}3x + 46{,}2 = 0.$$

Вычислим его наибольший корень с помощью названного выше алгоритма и алгоритма Ньютона.

Пусть оба алгоритма «стартуют» с одинакового начального α_i^*. За первое приближение возьмем какое-либо число, лежащее за или на границе корней, которая определяется как

$$1 + \sqrt[k]{B} = 1 + \sqrt[3]{50{,}7} = 4{,}8 \text{ и } -(1 + 46{,}2) = -47{,}2,$$

где k — номер первого отрицательного коэффициента многочлена; B — модуль наибольшего отрицательного коэффициента.

При определении границы отрицательных корней оперируют с $f(-x)$.

Вычисления сведены в таблицу, где

$$\Delta = \frac{\alpha_i^{*5} + 8{,}1\alpha_i^{*4} + 0{,}7\alpha_i^{*3} - 50{,}7\alpha_i^{*2} - 5{,}3\alpha_i^* + 46{,}2}{5\alpha_i^{*4} + 32{,}4\alpha_i^{*3} + 2{,}1\alpha_i^{*2} - 101{,}4\alpha_i^* - 5{,}3} =$$

$$= \frac{\{\{[(\alpha_i^* + 8{,}1)\,\alpha_i^* + 0{,}7]\,\alpha_i^* - 50{,}7\}\,\alpha_i^* - 5{,}3\}\,\alpha_i^* + 46{,}2}{\{[(5\alpha_i^* + 32{,}4)\,\alpha_i^* + 21]\,\alpha_i^* - 101{,}4\}\,\alpha_i^* - 5{,}3}.$$

Алгоритм с аддитивной поправкой			Алгоритм с мультипликативной поправкой			
Исходный корень α_i^*	Аддитивная поправка Δ	Уточненный корень $\alpha_i = \alpha_i^* - \Delta$	Исходный корень α_i^*	Подкасательная Δ	Мультипликативный коэффициент поправки $\mu = \frac{1}{n-1-\alpha_i^*/\Delta}$	Уточненный корень $\alpha_i = \alpha_i^*(1+\mu)$
—47,2	—8,65	—38,55	—47,2	—8,65	$-0{,}685 = \frac{1}{4-\frac{47{,}2}{8{,}65}}$	$-47{,}2\,(1-0{,}685) = -14{,}6$
—38,55	—7,37	—31,18	—14,6	—2,34	—0,445	—8,1
—31,18	—5,85	—25,33	—8,1	—0,695	—0,131	—7,04
—25,33	—5,03	—20,3	—7,04	—0,039	—0,00567	—7,0001
—20,3	—3,60	—16,7				
—16,7	—2,74	—13,96				
—13,96	—2,19	—11,77				
—11,77	—1,67	—10,1				
—10,1	—1,3	—8,8				
—8,8	—0,83	—7,97				
—7,97	—0,52	—7,45				
—7,45	—0,26	—7,19				
—7,19	—0,12	—7,07				
—7,07	—0,044	—7,026				
—7,026	—0,016	—7,01				

Однократное вычисление Δ по сложности равно двум «горнерам» для $f(x)$.

Из примера видно, что вычисление наибольшего действительного корня $\alpha_i = 7{,}0000$ по алгоритму Ньютона потребовало значительно больше времени. Следует заметить, что пример не подобран специально и аналогичная картина наблюдается во всех случаях. Далее поясним, как получаются алгоритмы, подобные рассмотренному.

Для алгебраического многочлена

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

справедливы формулы Ньютона

$$\left.\begin{aligned} s_1 + a_1 &= 0,\\ s_2 + a_1 s_1 + a_2 2 &= 0,\\ s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + a_3 3 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1} s_1 + a_n s_0 &= 0,\\ s_{n+1} + a_1 s_n + \ldots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $s_0, s_1, s_2, \ldots$ — суммы нулевых, первых, вторых и т. д. степеней его корней.

Для делителя степени $(n-1)$ формулы Ньютона имеют вид

$$\left.\begin{aligned} s_{д1} + b_1 &= 0,\\ s_{д2} + b_1 s_{д1} + b_2 2 &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ s_{д\,(n-1)} + b_1 s_{д\,(n-2)} + \ldots + b_{n-2} s_{д1} + b_{n-1} s_{д0} &= 0,\\ s_{дn} + b_1 s_{д\,(n-1)} + \ldots + b_{n-2} s_{д2} + b_{n-1} s_{д1} &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $s_{д0}$, $s_{д1}$, $s_{д2}$, . . . — суммы нулевых, первых, вторых и т. д. степеней корней делителя; b_1, b_2, . . ., b_{n-1} — коэффициенты делителя.

Суммы $s_{д0}$, $s_{д1}$, $s_{д2}$, . . . отличаются от сумм s_0, s_1, s_2, . . . отсутствием одного корня α_i многочлена

$$\begin{aligned} s_{д0} &= s_0 + \alpha_i^0, \\ s_{д1} &= s_1 - \alpha_i^1, \\ s_{д2} &= s_2 - \alpha_i^2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому справедливы соотношения

$$\begin{aligned} s_1 + b_1 &= \alpha_i, \\ s_2 + b_1 s_1 + b_2 2 &= \alpha_i^2 + b_1 \alpha_i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n-1} + b_1 s_{n-2} + \ldots + b_{n-2} s_1 + b_{n-1} s_0 &= \alpha_i^{n-1} + b_1 \alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2} \alpha_i + b_{n-1}, \\ s_n + b_1 s_{n-1} + \ldots + b_{n-2} s_2 + b_{n-1} s_1 &= (\alpha_i^{n-1} + b_1 \alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2} \alpha_i + b_{n-1})\, \alpha_i, \\ s_{n+1} + b_1 s_n + \ldots + b_{n-2} s_3 + b_{n-1} s_2 &= (\alpha_i^{n-1} + b_1 \alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2} \alpha_i + b_{n-1})\, \alpha_i^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Начиная с n-й строки количества в левых частях строк получаются умножением на α_i левой части предыдущей строки, или

$$\alpha_i = \frac{s_{n+m} + b_1 s_{n+m-1} + \ldots + b_{n-2} s_{m+2} + b_{n-1} s_{m+1}}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-2} s_{m+1} + b_{n-1} s_m}, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Подставим в $(n-1)$-е строки в (5) не точное значение α_i, а приближенное α_i^*. Зная суммы s_1, s_2, . . ., вычислим приближенные значения коэффициентов b_1^*, b_2^*, . . ., b_{n-1}^*. Из (6) найдем новое приближенное значение корня α_i^{**}. Величина α_i^{**} отличается и от α_i^* и от истинного корня α_i. Однако некоторое сочетание α_i^* и α_i^{**}, зависящее от $m = 0, 1, 2, \ldots$, дает значение корня более точное, чем первоначальное α_i^*. Для того чтобы определить, какое сочетание α_i^* и α_i^{**} нужно брать для уточнения α_i^*, проследим в процессе названных вычислений преобразования погрешности корня α_i^*

$$\Delta\alpha_i^* = \alpha_i^* - \alpha_i \tag{7}$$

в погрешность корня α_i^{**}

$$\Delta\alpha_i^{**} = \alpha_i^{**} - \alpha_i. \tag{8}$$

Учитывая (6), напишем

$$\Delta\alpha_i^{**} = \frac{s_{n+m} + b_1^* s_{n+m-1} + \ldots + b_{n-2}^* s_{m+2} + b_{n-1}^* s_{m+1}}{s_{n+m-1} + b_1^* s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-2}^* s_{m+1} + b_{n-1}^* s_m} - \alpha_i. \tag{9}$$

Здесь погрешность $\Delta\alpha_i^*$ входит в выражения для коэффициентов b_1^*, b_2^*, . . ., b_{n-1}^*. Согласно первым строкам (5), пренебрегая членами с $(\Delta\alpha_i^*)^2$, $(\Delta\alpha_i^*)^3$, . . ., напишем

$$\begin{aligned} b_1^* &\cong b_1 + \Delta\alpha_i^*, \\ b_2^* &\cong b_2 + \Delta\alpha_i^* (\alpha_i + b_1), \\ b_3^* &\cong b_3 + \Delta\alpha_i^* (\alpha_i^2 + b_1 \alpha_i + b_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1}^* &\cong b_{n-1} + \Delta\alpha_i^* (\alpha_i^{n-2} + b_1 \alpha_i^{n-3} + \ldots + b_{n-2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка (10) в (9) дает (погрешностью $\Delta\alpha_i^*$ в знаменателе пренебрегаем)

$$\Delta\alpha_i^{**} = \frac{(s_{n+m} - \alpha_i s_{n+m-1}) + (b_1 + \Delta\alpha_i^*)(s_{n+m-1} - \alpha_i s_{n+m-2}) + \ldots +}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ [\Delta\alpha_i^* (\alpha_i^{n-2} + b_1\alpha_i^{n-3} + \ldots + b_{n-2}) + b_{n-1}](s_{m+1} - \alpha_i s_m)}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m} =$$

$$= \frac{s_{n+m} - \alpha_i s_{n+m-1} + b_1 (s_{n+m-1} - \alpha_i s_{n+m-2}) + \ldots + b_{n-1}(s_{m+1} - \alpha_i s_m)}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m} +$$

$$+ \Delta\alpha_i^* \frac{s_{n+m-1} + \alpha_i s_{n+m-2} + (\alpha_i + b_1)(s_{n+m-2} - \alpha_i s_{n+m-3}) + \ldots +}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ (\alpha_i^{n-2} + b_1\alpha_i^{n-3} + \ldots + b_{n-2})(s_{m+1} - \alpha_i s_m)}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m}.$$

Первое слагаемое по формулам Вьета и Ньютона равно 0, а второе преобразуется к виду

$$\Delta\alpha_i^* \frac{(s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m) + [-s_m (\alpha_i^{n-1} + b_1\alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-1})]}{s_{n+m-1} + b_1 s_{n+m-2} + \ldots + b_{n-1} s_m} =$$

$$= \Delta\alpha_i^* \left(1 - \frac{s_m}{\alpha_i^m}\right).$$

Таким образом, при $\Delta\alpha_i^* \rightarrow 0$ преобразование погрешности в процессе названных выше вычислений происходит по закону

$$\Delta\alpha_i^{**} \cong \left(1 - \frac{s_m}{\alpha_i^m}\right) \Delta\alpha_i^*. \tag{11}$$

Исключая из выражений (7), (8) и (11) величины $\Delta\alpha_i^*$ и $\Delta\alpha_i^{**}$, найдем сочетание α_i^* и α_i^{**}, дающие уточненное значение корня α_i

$$\alpha_i^m + \frac{s_m}{\alpha_i^* - \alpha_i^{**}} \alpha_i - \frac{\alpha_i^* s_m}{\alpha_i^* - \alpha_i^{**}} = 0. \tag{12}$$

Корень α_i, который по известным s_m, α_i^* и α_i^{**} получается из (11), неточен из-за пренебрежения $(\Delta\alpha_i^*)^2$, $(\Delta\alpha_i^*)^3$ и т. д., но при малых $\Delta\alpha_i^*$ он точнее, чем α_i^*, так как все вычисления связаны с исключением погрешностных членов, содержащих первую степень $\Delta\alpha_i^*$.

Найдем непосредственную связь между α_i^{**} и многочленом $f(x)$. Предварительно докажем равенства

$$s_1 + b_1^* = \alpha_i^*,$$

$$s_2 + b_1^* s_1 + 2b_2^* = (\alpha_i^*)^2 + b_1^* \alpha_i^*,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{n-1} + b_1^* s_{n-2} + \ldots + b_{n-1}^* s_0 = (\alpha_i^*)^{n-1} + b_1^* (\alpha_i^*)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}^* = f'(\alpha_i^*), \tag{13}$$

$$s_n + b_1^* s_{n-1} + \ldots + b_{n-1}^* s_1 = \alpha_i^* f'(\alpha_i^*) - s_0 f(\alpha_i^*),$$

$$s_{n+1} + b_1^* s_n + \ldots + b_{n-1}^* s_2 = (\alpha_i^*)^2 f'(\alpha_i^*) - f(\alpha_i^*)(s_0\alpha_i^* + s_1),$$

$$s_{n+2} + b_1^* s_{n+1} + \ldots + b_{n-1}^* s_3 = (\alpha_i^*)^3 f'(\alpha_i^*) - f(\alpha_i^*)(s_0\alpha_i^{*2} + s_1\alpha_i^* + s_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Первые $(n-1)$ строк этих равенств удовлетворяются при вычислении чисел $b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{n-1}^*$, которые являются коэффициентами целой части частного

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_i^*} = x^{n-1} + b_1^* x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}^* x + b_{n-1}^* + \frac{f(\alpha_i^*)}{x - \alpha_i^*}.$$

Таким образом, в $(n-1)$-й строке фигурирует количество

$$(\alpha_i^*)^{n-1}+b_1^*(\alpha_i^*)^{n-2}+\ldots+b_{n-1}^*=\lim_{x\to\alpha_i^*}(x^{n-1}+b_1^*x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}^*)=$$

$$=\lim_{x\to\alpha_i^*}\frac{f(x)-f(\alpha_i^*)}{x-\alpha_i^*}=f'(\alpha_i^*).$$

Для доказательства следующей, n-й, строки выразим предварительно b_1^*, b_2^*, . . ., b_{n-1}^* из предыдущих строк с учетом формул Ньютона (2)

$$\begin{aligned}b_1^*&=a_1+\alpha_i^*,\\ b_2^*&=a_2+\alpha_i^*a_1+(\alpha_i^*)^2,\end{aligned}\qquad(14)$$

. . . . . .

$$b_{n-1}^*=a_{n-1}+\alpha_i^*a_{n-2}+\ldots+(\alpha_i^*)^{n-2}a_1+(\alpha_i^*)^{n-1}.$$

Левая часть n-й строки запишется в виде

$$\begin{gathered}s_n+\\ +\alpha_i^*s_{n-1}+a_1s_{n-1}+\\ +\alpha_i^*s_{n-2}(\alpha_i^*+a_1)+a_2s_{n-2}+\\ +\alpha_i^*s_{n-3}(\alpha_i^{*2}+a_1\alpha_i^*+a_2)+a_3s_{n-3}+\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ +\alpha_i^*s_1(\alpha_i^{*n-2}+a_1\alpha_i^{*n-3}+\ldots+a_{n-2})+a_{n-1}s_1+\\ +\alpha_i^*s_0(\alpha_i^{*n-1}+a_1\alpha_i^{*n-2}+\ldots+a_{n-1})-\alpha_i^*s_0(\alpha_i^{*n-1}+a_1\alpha_i^{*n-2}+\ldots+a_{n-1}).\end{gathered}$$

Согласно (14) и $(n-1)$-й строке из (13) первый столбец здесь равен

$$\alpha_i^*(s_{n-1}+b_1^*s_{n-2}+b_2^*s_{n-3}+\ldots+b_{n-2}^*s_1+b_{n-1}^*s_0)=\alpha_i^*f'(\alpha_i^*).$$

Согласно n-й строке формул Ньютона второй столбец без нижнего члена равен $-a_ns_0$, что вместе с упомянутым нижним членом дает $-s_0f(\alpha_i^*)$.

Таким образом, левая часть n-й строки из (13) равна $\alpha_i^*f'(\alpha_i^*)-s_0f(\alpha_i^*)$.

Аналогично получаются остальные строки. С учетом (13) вычисление α_i^{**} можно делать по формуле

$$\begin{aligned}\alpha_i^{**}&=\frac{\alpha_i^*f'(\alpha_i^*)-s_0f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}=\alpha_i^*-\frac{s_0f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}\quad\text{при}\quad m=0,\\ \alpha_i^{**}&=\alpha_i^*-\frac{s_1f(\alpha_i^*)}{\alpha_i^*f'(\alpha_i^*)-s_0f(\alpha_i^*)}\quad\text{при}\quad m=1,\\ \alpha_i^{**}&=\alpha_i^*-\frac{s_2f(\alpha_i^*)}{(\alpha_i^*)^2f'(\alpha_i^*)-f(\alpha_i^*)(s_0\alpha_i^*+s_1)}\quad\text{при}\quad m=2\end{aligned}\qquad(15)$$

и т. д.

Принимая $m=0, 1, 2, \ldots$, из выражений (12) и (15) получим различные интерационные формулы для вычисления корня многочлена (1). При $m=0$, подставляя (15) в (12), получим известную итерационную формулу Ньютона

$$\alpha_i=\alpha_i^*-\frac{f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}=\alpha_i^*-\Delta.\qquad(16)$$

При $m=1$

$$\alpha_i=\alpha_i^*\frac{\alpha_i^*f'(\alpha_i^*)-s_0f(\alpha_i^*)}{\alpha_i^*f'(\alpha_i^*)-(s_0-1)f(\alpha_i^*)}=\alpha_i^*\left[1+\frac{\Delta}{(n-1)\Delta-\alpha_i^*}\right], \tag{17}$$

где $\Delta=\frac{f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}$ — длина подкасательной к кривой $f(x)$ в точке $x=\alpha_i^*$.

При $\Delta\to 0$ выражение (17) превращается в формулу Ньютона (16). Поэтому по крайней мере для малых Δ итерации по формуле (17) сходятся так же, как и по методу Ньютона.

При $m=2$ корень α_i находится из уравнения

$$\alpha_i^2+\frac{\alpha_i^{*2}f'(\alpha_i^*)-f(\alpha_i^*)(s_0\alpha_i^*+s_1)}{f(\alpha_i^*)}\alpha_i-\frac{\alpha_i^*[\alpha_i^{*2}f'(\alpha_i^*)-f(\alpha_i^*)(s_0\alpha_i^*+s_1)]}{f(\alpha_i^*)}=0.$$

Откуда получаем

$$\alpha_i=\frac{-[\alpha_i^{*2}-\Delta(s_0\alpha_i^*+s_1)]+\sqrt{[\alpha_i^{*2}-\Delta(s_0\alpha_i^*+s_1)]^2+4\Delta\alpha_i^*[\alpha_i^{*2}-\Delta(s_0\alpha_i^*+s_1)]}}{2\Delta}, \tag{18}$$

где $\Delta=\frac{f(\alpha_i^*)}{f'(\alpha_i^*)}$.

Перед радикалом (18) надо брать знак плюс. Разложение (18) в ряд по степеням Δ дает

$$\alpha_i=\alpha_i^*-\Delta+\left[\frac{2}{\alpha_i^*}-\frac{s_0\alpha_i^*+s_1}{(\alpha_i^*)^2}\right]\Delta^2-\ldots \tag{19}$$

Следовательно, итерации по формуле (18) сходятся по крайней мере для малых Δ так же, как и в методе Ньютона.

При $m=2, 3, 4\ldots$ для нахождения уточненного корня приходится решать трехчленное уравнение, что нецелесообразно из-за сложности, хотя существуют действенные методы для решения трехчленных уравнений.*

Полученные итерационные формулы (17), (18), (19) сложнее, чем формула Ньютона (16). Однако они обладают рядом практических преимуществ. Процесс вычислений по формуле (17), начатый с величины α_i^*, по модулю превосходящей корни многочлена, всегда сходится быстрее к одному из наибольших корней, чем вычисление методом Ньютона. Интуитивно это можно объяснить тем, что по мере продвижения в глубь формул Ньютона (2) вес наибольших корней растет по отношению к весу корней малых. Это же подтверждают численные примеры.

Вычисления по формуле (18) в таких же условиях сходятся еще быстрее. Указанная формула практически имеет относительно (16) и (17) полезную особенность: процесс вычислений по ней, начатый с действительного значения α_i^*, может сходиться к комплексному корню, если действительных корней нет или они расположены дальше от начальных α_i^*.

---

* П. Л. Чебышев. Высшая алгебра (лекции 1856—1857 гг.). Изд-во АН СССР, 1936.