Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.39

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ИНТЕГРАЛА

А. М. Журавский, А. Г. Корман

Рассмотрим функцию $F(x, y)$, где $y = y(x)$, удовлетворяющую следующим условиям.

1. $F(x, y)$ — непрерывная функция от x и y в области $a \leqslant x \leqslant b$ и $m \leqslant y \leqslant M$, где $m = \min\limits_{(a;\ b)} y(x)$, $M = \max\limits_{(a;\ b)} y(x)$,

2. $F(x, y)$ — монотонная функция от y. Не умаляя общности, полагаем $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$ при $y_2 > y_1$.

3. $y(x)$ — непрерывная функция от x на $[a, b]$.

В этом случае утверждается, что $\int\limits_a^b F[x, y(x)]\,dx = \int\limits_a^b F[x, y(\xi)]\,dx$, где $\xi = a + \theta(b-a)$, $0 < \theta < 1$.

Доказательство. Из п. 2

$$F(x, m) \leqslant F[x, y(x)] \leqslant F(x, M). \tag{1}$$

Откуда

$$\int\limits_a^b F(x, m)\,dx \leqslant \int\limits_a^b F[x, y(x)]\,dx \leqslant \int\limits_a^b F(x, M)\,dx. \tag{2}$$

Очевидно, что функция

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b F(x, y)\,dx \tag{3}$$

при условиях (1) и (2) является непрерывной и монотонной функцией от y.

Обозначим

$$\Phi(m) = l;\ \Phi(M) = L. \tag{4}$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\int\limits_a^b F[x, y(x)]\,dx = \lambda, \tag{5}$$

где $l < \lambda < L$.

Из неравенств (2) и (5) следует, что существует по крайней мере одно такое значение $y = \mu$, $m < \mu < M$, что

$$\int\limits_a^b F(x, \mu)\,dx = \int\limits_a^b F[x, y(x)]\,dx = \lambda. \tag{6}$$

Из непрерывности функции $y = y(x)$ следует, что существует по крайней мере одно такое значение $x = \xi$, $a < \xi < b$, что $y(\xi)$ μ. Следовательно,

$$\int_a^b F[x, y(x)]\,dx = \int_a^b F[x, y(\xi)]\,dx. \tag{7}$$

Эту теорему можно обобщить для интеграла вида

$$\int_a^b F[x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]\,dx = \int_a^b F(x, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\,dx =$$

$$= \int_a^b F[x, y_1(\xi_1), y_2(\xi_2), \ldots, y_n(\xi_n)]\,dx, \tag{8}$$

где $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$ $[i = 1, \ldots, n;\ m_i = \min\limits_{(a,b)} y_i(x);\ M_i = \max\limits_{(a,b)} y_i(x)]$

при условии, что $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ есть непрерывная функция от аргумента x, $y_1, \ldots, y_n$ и монотонная от аргументов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а функции $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — непрерывные функции на $[a, b]$. Это обобщение легко получается последовательным применением доказанной теоремы для каждой из функции $y_i(x)$. Легко заметить, что известная теорема о среднем $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$ для непрерывных $f(x)$ и $\varphi(x)$ и знакопостоянной $f(x)$ получается как частный случай доказанной теоремы. В самом деле, полагая $F(x, y) = f(x)\,y$, где $y = \varphi(x)$, замечаем, что знакопостоянство функции $f(x)$ является необходимым условием монотонности функции $F(x, y)$ от y

$$\int_a^b F[x, \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(\xi)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

Равенство (7) может явиться оценочной формулой для интеграла $\int_a^b F[x, y, (x)]\,dx$, имеющей наибольший практический интерес при малых колебаниях функции $y(x)$ на $[a, b]$, т. е. при малых значениях $M - m$.

В частности, если $F[x, y(x)]$ является монотонной функцией от x, оценка при помощи теоремы о среднем дает неравенство

$$m_1(b-a) < \int_a^b F[x, \varphi(x)]\,dx < M_1(b-a), \tag{10}$$

где для возрастающей функции

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= F[a, \varphi(a)] \\ M_1 &= F[b, \varphi(b)] \end{aligned}\right\}.$$

Формула (7) дает более узкий интервал, содержащий значение интеграла, чем формула (10). Покажем это на частном примере.

1. Рассмотрим эллиптический интеграл первого рода

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Применяя подстановку $x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.

Точное значение интеграла равно

$$\frac{1}{2} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1{,}8541}{2} = 0{,}92705.$$

Применяя формулу (7), получаем

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2y}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\theta^2x^2}} = \frac{1}{\theta} \ln\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right),$$

где $y = x^2$; $0 < \theta < 1$.

Легко показать, что $f(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)$ является убывающей функцией от θ на (0,1). При этом $f(+0) = 1$, а $f(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 0{,}881$. Оценка для интеграла по формуле (2) $0{,}881 < I < 1$, а по формуле (10) $\frac{\sqrt{2}}{2} < I < 1$ или $0{,}707 < I < 1$.

Теорема имеет приложение в теории нелинейных интегральных уравнений, при интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений и при применении приближенных расчетов.
