Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. А. Ахмедов

Дифференциальными уравнениями параболического типа описываются многие разнообразные задачи из области физики и техники. Их решение, представленное в виде классического разложения Фурье, пригодно только при больших и средних значениях времени. Между тем ряд конкретных технических задач требует рассмотрения кратковременных процессов. Уже имеются некоторые частные результаты [Лыков, 1952; Карслоу, Егер, 1964] в этом направлении.

Рассмотрим решение нестационарной задачи теплопроводности при краевых условиях третьего рода. Приведем решение задачи в классической и новой, предложенной А. М. Журавским [1959], интегральной форме, быстро сходящейся при малом t. В последнюю входит функция $\theta(x', x, t)$. Она хорошо изучена при $h_1 = h_2$ (h_1, $h_2 \geqslant 0$ — постоянные) [Журавский, 1961]. Цель статьи — указать общее и частное выражения $\theta(x', x, t)$ при $h_1 \neq h_2$ с тем, чтобы облегчить использование новой формы решения для практических расчетов при изучении кратковременных процессов. Численные примеры будут рассмотрены в дальнейшем.

Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности пластины толщиной l, когда между окружающей средой нулевой температуры и ограничивающими пластину плоскостями $x = 0$ и $x = l$ происходит теплообмен по закону конвекции. Начальная температура $f(x)$.

Имеем

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \qquad (t > 0, \quad 0 < x < l), \tag{1}$$

$$U(x, t)\big|_{t=0} = f(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h_1 U(0, t), \qquad h_1 \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = -h_2 U(l, t), \qquad h_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Общее решение задачи (1)—(4) может быть представлено равенством

$$U(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_n^2 + h_2^2)(\mu_n \cos \mu_n x + h_1 \sin \mu_n x)}{(\mu_n^2 + h_2^2)[l(\mu_n^2 + h_1^2) + h_1] + h_2(\mu_n^2 + h_1^2)} \times$$

$$\times e^{-a^2 \mu_n^2 t} \int_0^l f(x)(\mu_n \cos \mu_n x + h_1 \sin \mu_n x)\, dx, \tag{5}$$

где μ_n — n-ый положительный корень уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu l = \frac{\mu^2 - h_1 h_2}{\mu(h_1 + h_2)}. \tag{6}$$

Здесь предполагается, что хотя бы один из коэффициентов теплообмена на поверхностях $x = 0$ и $x = l$ не равен нулю. Если $h_1 = h_2 = h$, то $U(x, t)$ примет вид

$$U(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cos \mu_n x + h \sin \mu_n x}{2h + l(\mu_n^2 + h^2)} e^{-a^2 \mu_n^2 t} \times \tag{7}$$

$$\times \int_0^l f(x) (\mu_n \cos \mu_n x + h \sin \mu_n x)\, dx.$$

При $h_1 = h_2 = 0$, т. е. когда поток тепла через поверхности $x = l$ и $x = 0$ отсутствует, решение задачи будет иметь вид

$$U(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx +$$

$$+ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \mu_n^2 t} \cos \mu_n x \int_0^l f(x) \cos \mu_n x\, dx. \tag{8}$$

Ряд в правой части (5), медленно сходящийся при малых t, может быть преобразован и представлен интегралом [Журавский, 1959] (в дальнейшем для удобства записи положим $a = 1$, $l = 1$)

$$U(x, t) = \int_0^1 f(x')\, \theta(x', x, t)\, dx', \tag{9}$$

где

$$\theta(x', x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x' - x + 2m)^2}{4t}} F_{m, m}(x', x, t; \quad h_1, h_2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x' + x + 2m)^2}{4t}} F_{m+1, m}(x', x, t; \quad h_1, h_2) \right\}, \tag{10}$$

$$F_{m, n}(x', x, t; \quad h_1, h_2) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{\frac{\lambda_{m, n}^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m, n}(z)\, e^{-z^2 t + \lambda_{m, n} z i}\, dz, \tag{11}$$

$$H_{m, n}(z) = \frac{(z - h_1 i)^m (z - h_2 i)^n}{(z + h_1 i)^m (z + h_2 i)^n}, \tag{12}$$

$$\lambda_{m, n} = \begin{cases} x' - x + 2m, & n = m; \\ x' + x + 2(m - 1), & n = m - 1. \end{cases} \tag{13}$$

Из (10) и (11) видно, что исследование $\theta(x', x, t)$ сводится к изучению $F_{m, n}(x', x, t; \quad h_1, h_2)$, т. е. к рассмотрению

$$I_{m, n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m, n}(z)\, e^{-z^2 t + \lambda_{m, n} z i}\, dz. \tag{14}$$

Интегралы (14) могут быть представлены равенством [Ахмедов, 1966а]

$$I_{m, n} = I_{m, n}^{(0)} [P_{m, n}(\lambda_{m, n}, t; \quad h_1, h_2) + 2\sqrt{\pi t}\, Q_{m, n}(\lambda_{m, n}, t; \quad h_1, h_2)\, \psi(v_{m, n}^{(1)}) +$$

$$+ 2\sqrt{\pi t}\, R_{m, n}(\lambda_{m, n}, t; \quad h_1, h_2)\, \psi(v_{m, n}^{(2)})], \tag{15}$$

где

$$I^{(0)}_{m,n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2_{m,n}}{4t}}, \tag{16}$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2-2xz}\, dz, \tag{17}$$

$$\nu^{(i)}_{m,n} = h_i \sqrt{t} + \frac{\lambda_{m,n}}{2\sqrt{t}} \qquad (i = 1, 2). \tag{18}$$

Коэффициенты $P_{m,n} = P_{m,n}(\lambda_{m,n}, t;\ h_1, h_2)$; $Q_{m,n} = Q_{m,n}(\lambda_{m,n}, t;\ h_1, h_2)$, $R_{m,n} = R_{m,n}(\lambda_{m,n}, t;\ h_1, h_2)$ связаны соотношениями (предполагается, что $\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m}$)

$$P_{m+1,n+1} = \frac{2h_1}{m} \cdot \frac{\partial P_{m,n+1}}{\partial h_1} + \frac{2h_2}{n} \cdot \frac{\partial P_{m-1,n}}{\partial h_2} - \frac{8h_1 t}{m} Q_{m,n-1} - \frac{8h_2 t}{n} R_{m-1,n} + P_{m-1,n-1} \tag{19}$$

$$Q_{m+1,n+1} = \frac{2h_1}{m} \cdot \frac{\partial Q_{m,n+1}}{\partial h_1} + \frac{2h_2}{n} \cdot \frac{\partial Q_{m-1,n}}{\partial h_2} + \frac{2h_1(2h_1 t + \lambda_{m,n})}{m} Q_{m,n+1} + Q_{m-1,n-1}, \tag{20}$$

$$R_{m+1,n+1} = \frac{2h_1}{m} \cdot \frac{\partial R_{m,n+1}}{\partial h_1} + \frac{2h_2}{n} \cdot \frac{\partial R_{m-1,n}}{\partial h_2} + \frac{2h_2(2h_2 t + \lambda_{m,n})}{n} R_{m-1,n} + R_{m-1,n-1}. \tag{21}$$

Указанные коэффициенты — целые относительно всех своих аргументов. В частности,

$$I_{0,0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2_{0,0}}{4t}}, \tag{22}$$

$$I_{1,0} = I^{(0)}_{1,0}\left[1 - 2h_1\sqrt{\pi t}\,\psi(\nu^{(1)}_{1,0})\right], \tag{23}$$

$$I_{0,1} = I^{(0)}_{0,1}\left[1 - 2h_2\sqrt{\pi t}\,\psi(\nu^{(2)}_{0,1})\right], \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_{0,0} = 1,\ Q_{0,0} = R_{0,0} = 0;\\ &P_{1,0} = 1,\ Q_{1,0} = -h_1,\ R_{1,0} = 0;\\ &P_{0,1} = 1,\ Q_{0,1} = 0;\ R_{0,1} = -h_2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Интеграл $I_{1,1}$ может быть представлен равенством [Ахмедов, 1966б]

$$I_{1,1} = I_{0,0}\left[P_{1,1} + 2\sqrt{\pi t}\, R_{1,1}\psi(\nu^{(2)}_{1,1})\right], \tag{26}$$

где

$$P_{1,1} = 1 + 2h_1(h_1 + h_2)\sqrt{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^k (h_1 - h_2)^{k-1}}{k!} \bar{B}_k(\nu^{(2)}_{1,1}), \tag{27}$$

$$R_{1,1} = -(h_1 + h_2)\left[1 + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^k (h_1 - h_2)^{k-1}}{k!} \bar{A}_k(\nu^{(2)}_{1,1})\right], \tag{28}$$

$$Q_{1,1} = 0,\ \nu^{(2)}_{1,1} = h_2\sqrt{t} + \frac{\lambda_{1,1}}{2\sqrt{t}}, \tag{29}$$

$$\bar{A}_k(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} a_m^{(k)} x^{k-2m} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

$$\bar{B}_k(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} b_m^{(k)} x^{k-2m+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

где $[x]$ — целая часть x.

Причем

$$\bar{A}_0(x) = 1, \tag{32}$$

$$\bar{B}_k(x) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 1, & k = 1. \end{cases} \tag{33}$$

Соотношения

$$a_m^{(k+1)} = a_m^{(k)} + \frac{k}{2} a_{m-1}^{(k-1)}, \quad \left(k \geqslant 1;\ m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]\right), \tag{34}$$

$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} + \frac{k}{2} b_{m-1}^{(k-1)}, \quad \left(k \geqslant 2;\ m = 1,2, \ldots, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right), \tag{35}$$

вместе с условиями

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(k)} &= 1 \\ a_m^{(k)} &= 0,\ m > \left[\frac{k}{2}\right] \end{aligned}\right\}, \qquad k \geqslant 0, \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} b_0^{(0)} &= 0,\ b_0^{(k)} = 1 \\ b_m^{(k)} &= 0;\ m \geqslant \left[\frac{k}{2}\right] \end{aligned}\right\}, \qquad k \geqslant 1 \tag{37}$$

дают возможность последовательного определения значений $a_m^{(k)}$ и $b_m^{(k)}$. Можно составить таблицы их значений. Равенства (19)—(21) вместе с начальными значениями (25), (27)—(29) позволяют последовательно определять коэффициенты интеграла $I_{m,n}$. Полученные результаты дают возможность указать выражение функций

$$F_{m,m}(x', x, t;\ h_1, h_2) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{\lambda_{m,m}^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m,m}(z)\, e^{-z^2 t + \lambda_{m,m} z i}\, dz, \tag{38}$$

$$F_{m+1,m}(x', x, t;\ h_1, h_2) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{\lambda_{m+1,m}^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m+1,m}(z)\, e^{-z^2 t + \lambda_{m+1,m} z i}\, dz, \tag{39}$$

входящих в разложение (10). Они будут иметь вид

$$F_{m,m}(x', x, t;\ h_1, h_2) = P_{m,m}(\lambda_{m,m}, t;\ h_1, h_2) +$$

$$2\sqrt{\pi t}\,[Q_{m,m}(\lambda_{m,m}, t;\ h_1, h_2)\,\psi(\nu_{m,m}^{(1)}) + R_{m,m}(\lambda_{m,m}, t;\ h_1, h_2)\,\psi + (\nu_{m,m}^{2})], \tag{40}$$

$$F_{m+1,m}(x', x, t;\ h_1\, h_2) = P_{m+1,m}(\lambda_{m+1,m}, t;\ h_1, h_2) +$$

$$+ 2\sqrt{\pi t}\,[Q_{m+1,m}(\lambda_{m+1,m}, t;\ h_1, h_2)\,\psi(\nu_{m+1,m}^{(1)}) + R_{m+1,m}(\lambda_{m+1,m}, t;\ h_1, h_2)\,\psi(\nu_{m+1,m}^{(2)})], \tag{41}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \nu^{(i)}_{m,\,m} &= \frac{2h_i t + x' - x + 2m}{2\sqrt{t}}, \\ \nu^{(i)}_{m+1,\,m} &= \frac{2h_i t + x' + x + 2m}{2\sqrt{t}} \qquad (i = 1,\ 2). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Функция

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau^2 - 2x\tau}\, d\tau$$

может быть представлена для малых значений x разложением

$$\psi(x) = e^{x^2}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}\right], \tag{43}$$

а для больших значений x — разложением

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!\, x^{2k+1}}. \tag{44}$$

Можно пользоваться и специальными таблицами.

Приводим выражения функций $F_{m,n}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2)$ для небольших значений m и n

$$F_{0,0}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2) = 1; \tag{45}$$

$$F_{1,0}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2) = 1 - 2h_1\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_1\sqrt{t} + \frac{\lambda_{1,0}}{2\sqrt{t}}\right); \tag{46}$$

$$F_{0,1}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2) = 1 - 2h_2\sqrt{\pi t}\,\psi\left(h_2\sqrt{t} + \frac{\lambda_{0,1}}{2\sqrt{t}}\right); \tag{47}$$

$$\begin{aligned} F_{1,1}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2) = 1 + \\ + 2h_1(h_1 + h_2)\sqrt{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^k (h_1 - h_2)^{k-1}}{k!}\, \bar{B}_k\left(h_2\sqrt{t} + \frac{\lambda_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right) - \\ - 2\sqrt{\pi t}\,(h_1 + h_2)\left[1 + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sqrt{t})^k (h_1 - h_2)^{k-1}}{k!}\, \bar{A}_k\left(h_2\sqrt{t} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\lambda_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right)\right] \psi\left(h_2\sqrt{t} + \frac{\lambda_{1,1}}{2\sqrt{t}}\right); \end{aligned} \tag{48}$$

В (46)—(48) $\lambda_{m,n}(m,\ n = 0;\ 1)$ определяются из (13). Заметим, что при $\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m}$

$$F_{m,n}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2) = F_{n,m}(x',\ x,\ t;\ h_2,\ h_1). \tag{49}$$

Равенство (49) значительно облегчает определение выражения функций $F_{m,n}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2)$.

Разложение (10) в силу

$$|F_{m,n}(x',\ x,\ t;\ h_1,\ h_2)| \leqslant 1 \tag{50}$$

быстро сходится для малых значений t, ибо главную роль в нем играют $I_{0,0}$ и ближайшие к нему члены ряда. Последние перестают действовать при большом m благодаря множителю $e^{-m^2/t}$. Поэтому достаточно ограничиться выражениями $F_{m,n}(x', x, t; h_1, h_2)$ для небольших значений m, n.

Равенство (9) позволяет приближенно определить $U(x, t)$, пользуясь любой из формул приближенных квадратур. Температурное поле, представленное в указанной форме, дает возможность производить расчет теплопроводности для малых значений безразмерной величины a^2t/e^2 — критерия Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

Ахмедов М. Еще раз об обобщенных функциях тэта. Уч. Зап. Душанбинск. гос. пед. ин-та, т. 53, вып. 5, 1966а.

Ахмедов М. Об интегралах вида $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{kl}(z)\, e^{-z^2t+n_k, l^{zi}}\, dz$.

Там же, 1966б.

Журавский А. М. Об одном обобщении модулярного преобразования функций тэта. Зап. ЛГИ, т. XXX, вып. 3, 1959.

Журавский А. М. Об обобщенных тэта-функциях. Зап. ЛГИ, т. XXXVII, вып. 3, 1961.

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Наука, 1964.

Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГТТИ, 1952.