Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ РАДИУСОВ ОДНОЛИСТНОСТИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИИ

Л. П. Ильина

Пусть $S^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$ — класс функций

$$f(z)=z+c_{k+1}z^{k+1}+c_{2k+1}z^{2k+1}+\ldots,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$; $S^{(k)}_{\alpha_k}$, $0<\alpha_k\leqslant\frac{2}{k}$ — подкласс функций из $S^{(k)}$ таких, что $|f(z)|\leqslant\frac{Mr}{(1-r^k)^{\alpha_k}}$, $|z|=r$, $0<r<1$, $M\geqslant 1$.

Класс $S^k_{\alpha_k}$ не пуст при любом α_k, $0<\alpha_k\leqslant\frac{2}{k}$.

Действительно, для любого α_k из указанного промежутка можно найти такое натуральное число m, делящееся на k, что $\frac{1}{m}<\alpha_k$, а тогда

$$\frac{z}{(1-z^m)^{1/m}}\in S^{(m)}_{\frac{1}{m}}\subset S^{(k)}_{\frac{1}{m}}\subset S^{(k)}_{\alpha_k}.$$

Пусть $f_n(z)=z+c_{k+1}z^{k+1}+\ldots+c_{k(n-1)+1}z^{k(n-1)+1}$; $r_n(f)$ — радиус однолистности $f_n(z)$, т. е. наибольшее число r, $0<r<1$, такое, что $f_n(z)$ однолистна в круге $|z|<r$; $r_n=\inf r_n(f)$ в данном классе.

Пусть $\sum^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$ — класс функций $F(\zeta)=\zeta+a_{k-1}\frac{1}{\zeta^{k-1}}+a_{2k-1}\frac{1}{\zeta^{2k-1}}+\ldots$, регулярных и однолистных в области $1<|\zeta|<\infty$.

Пусть $F_n(\zeta)=\zeta+a_{k-1}\frac{1}{\zeta^{k-1}}+\ldots+a_{k(n-1)-1}\frac{1}{\zeta^{k(n-1)-1}}$; $R_n(F)$ — радиус однолистности $F_n(\zeta)$, т. е. наименьшее число R, $1\leqslant R<\infty$, такое, что $F_n(\zeta)$ однолистна в области $|\zeta|>R$; $R_n=\sup R_n(F)$ в данном классе.

Далее рассматривается класс функций $S^{(k)}_{\alpha_k}$. При $\alpha_k>\frac{1}{2}$ в этом классе получены оценки коэффициентов c_γ и радиуса однолистности r_n. При $\alpha_k=\frac{2}{k}$ получаются известные оценки для класса $S^{(k)}$, $k=1, 2, 3$ [Илиев, 1950; 1952]. Кроме того, для функций класса $\sum^{(k)}$ получены оценки радиуса однолистности $R_n^{(k)}$, $k=1, 2, 3, \ldots$

Получим оценку коэффициентов c_{nk+1} в классе $S^{(k)}_{\alpha_k}$.

Теорема 1. В классе $S^{(k)}_{\alpha_k}$, $\frac{1}{2}<\alpha_k\leqslant\frac{2}{k}$ справедлива оценка

$$|c_{nk+1}|<A_k(\alpha_k)(nk+1)^{\alpha_k-1},\qquad n=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$A_k(\alpha_k)=M\sqrt{\frac{2p-2}{e}}\cdot\frac{2^{\frac{\alpha_k}{p}}}{k^{\alpha_k}}\cdot\frac{1}{\alpha_k^{\alpha_k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}}\,e^{\alpha_k\left(1+\frac{\alpha_k}{n}\right)}, \tag{2}$$

где p — натуральное число, такое, что $2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)-1>0$, $(k=1, 2, 3)$.

Интегральное представление коэффициентов дает

$$(nk+1)\,c_{nk+1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'(z)}{z^{nk+1}}\,dz, \qquad 0<r<1.$$

Отсюда

$$(nk+1)\,|c_{nk+1}|\leqslant\frac{1}{2\pi r^{nk}}\int\limits_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|\,d\theta. \tag{3}$$

Так как $\frac{1}{2}<\alpha_k<\frac{2}{k}$, то, очевидно, $S^{(k)}_{\alpha_k}\subset S^{(k)}\subset S$. Теперь применим предложенную Г. М. Голузиным [1966] лемму.

Лемма. Для функций класса S при $0<r<1$ имеем оценку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda}\,|f'(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2p(1+\lambda)-2}{e}}\sqrt{\frac{M(\sqrt{r})^{\frac{2}{p}}}{1-r}\int\limits_0^r\frac{M(\rho)^{2\lambda+2-\frac{2}{p}}}{\rho}\,d\rho},$$

где $M(\rho)=\max|f(z)|$, p — целое положительное число, $|z|=r$ и $1-\frac{1}{p}+\lambda>0$. Применяя эту лемму при $\lambda=0$, $M(\rho)=\frac{M\rho}{(1-\rho^k)^{\alpha_k}}$, получаем для нашего случая

$$(nk+1)\,|c_{nk+1}|\leqslant\frac{1}{r^{nk+1}}T, \tag{4}$$

где

$$T=\sqrt{\frac{2p-2}{e}}\sqrt{\frac{M^{\frac{2}{p}}r^{\frac{1}{p}}}{(1-r)\left(1-r^{k/2}\right)^{2\alpha k/p}}\int\limits_0^r\frac{M^{2-\frac{2}{p}}\rho^{1-\frac{2}{p}}}{(1-\rho^k)^{2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\,d\rho}. \tag{5}$$

Чтобы оценить T сверху, предварительно заметим, что

$$\frac{1}{1-r^{k/2}}\leqslant\frac{2}{1-r}, \qquad k=1, 2, 3. \tag{6}$$

Путем простого, но громоздкого вычисления удается показать, что

$$\int\limits_0^r\frac{\rho^{1-\frac{2}{p}}}{(1-\rho^k)^{2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\,d\rho<\frac{1}{k^{1+\gamma_k}}\cdot\frac{1}{\gamma_k}\cdot\frac{1}{(1-r)^{\gamma_k}}, \tag{7}$$

где $2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)=1+\gamma_k$, $k=1, 2, 3$ при надлежащем выборе p (при $k=1$, $p\geqslant 2$, при $k=2$, $p=2, 3, 4$; при $k=3$, $p\geqslant 4$). Используя (6) и (7), получаем из (5)

$$T<M\sqrt{\frac{2p-2}{e}}\cdot\frac{r^{\frac{1}{2p}}}{(1-r)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha_k}{p}}}\,2^{\frac{\alpha_k}{p}}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha_k}k^{\alpha_k}\sqrt{2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}}.$$

Отсюда и из (4) находим

$$(nk+1)\,|c_{nk+1}|<M\sqrt{\frac{2p-2}{e}}\cdot\frac{2^{\frac{\alpha_k}{p}}}{k^{\alpha_k}\sqrt{2\alpha_k\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\,r^{nk+1}(1-r)^{\alpha_k}}$$

при $0<r<1$.

Полагая здесь $r=\frac{nk+1}{nk+1+\alpha_k}$, легко получаем оценку (1) при $k=1, 2, 3$, и теорема доказана.

При $\alpha_k=\frac{2}{k}$ в классе $S^{(k)}$ получаем оценку известного вида, порядок которой является точным [Хейман, 1960, стр. 54—61]

$$|c_{nk+1}|\leqslant A_k(nk+1)^{-1+\frac{2}{k}}.$$

Теперь получим оценку радиуса однолистности $f_n(z)$ в классе $S_{\alpha_k}^{(k)}$.

Теорема 2. В классе $S_{\alpha_k}^{(k)}$ при $n>n_k$ справедлива оценка

$$r_n^{(k)}\geqslant\left[1-(2+\alpha_k)\frac{\ln n}{n}\right]^{1/k},\qquad k=1, 2, 3, \tag{8}$$

где n_k — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\left\{\left[(k(n-1)+1)(2+\alpha_k)\frac{\ln n}{n}+k\right]^2+k^2\right\}^{\frac{\alpha_k}{2}}}{(2+\alpha_k)^{2+\alpha_k}(\ln n)^{2+\alpha_k}}<\frac{1}{A_k(\alpha_k)\,k2^{\frac{4}{k}-1}}. \tag{9}$$

Для того чтобы функция $f(z)$, регулярная в круге $|z|\leqslant r$, была однолистна в круге $|z|<r$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\neq 0$ при всех $|z_1|=|z_2|=r$. Имеем $f(z)=f_n(z)+G_n(z)$, где $G_n(z)=c_{nk+1}z^{nk+1}+\ldots$ Отсюда получаем

$$\left|\frac{f_n(z_1)-f_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|-\left|\frac{G_n(z_1)-G_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|. \tag{10}$$

Для $F(\zeta)\in\sum^{(1)}$ известна оценка Г. М. Голузина [1966, стр. 122]

$$\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\geqslant 1-\frac{1}{\rho^2},\quad |\zeta_1|=|\zeta_2|=\rho>1. \tag{11}$$

Пусть $f(z)\in S^{(k)}$. Применяя неравенство (11) к функции $F(\zeta)=[f(\zeta^{-1})]^{-1}\in\sum^{(k)}$ и учитывая, что $|f(z)|\geqslant|z|(1+|z|^k)^{-\frac{2}{k}}$, получаем неравенство [Илиев, 1949]

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqslant\frac{1-r^2}{(1+r^k)^{\frac{4}{k}}}\geqslant\frac{1-r^k}{k2^{\frac{4}{k}-1}},\qquad |z_1|=|z_2|=r<1. \tag{12}$$

Применяя теорему 1 и используя неравенство Гельдера при $|z_1|=|z_2|=r$, имеем

$$\left|\frac{G_n(z_1)-G_n(z_2)}{z_1-z_2}\right|=\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}c_{\nu k+1}\frac{z_1^{\nu k+1}-z_2^{\nu k+1}}{z_1-z_2}\right|\leqslant A_k(\alpha_k)\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k+1)^{\alpha_k}r^{\nu k}\leqslant$$

$$\leqslant A_k(\alpha_k)\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k+1)^2r^{\nu k}\right)^{\frac{\alpha_k}{2}}\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}r^{\nu k}\right)^{1-\frac{\alpha_k}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant A_k(\alpha_k)\frac{r^{kn}}{(1-r^k)^{1+\alpha_k}}\{[(k(n-1)+1)(1-r^k)+k]^2+k^2r^k\}^{\frac{\alpha_k}{2}}. \tag{13}$$

Теперь из (10), (12), (13) и сформулированного выше условия однолистности получаем следующее: для того чтобы функция $f_n(z)$ была однолистна в круге $|z|<r<1$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1-r^k}{k2^{\frac{4}{k}-1}}-A_k(\alpha_k)\frac{r^{nk}}{(1-r^k)^{1+\alpha_k}}\{[(k(n-1)+1)(1-r^k)+k]^2+k^2r^k\}^{\frac{\alpha_k}{2}}.$$

Полагая здесь $r=1-(2+\alpha_k)\frac{\ln n}{n}$ и учитывая, что $r^{nk}<n^{-(2+\alpha_k)}$, получаем неравенство (9). Замечая, что левая часть в (9) убывает с возрастанием n, получаем заключение теоремы.

В классе $S^{(k)}$ $\left(\text{при } \alpha_k=\frac{2}{k}\right)$ мы имеем известный результат Л. Илиева [1950, 1952];

$$r_n^{(k)}\geqslant\left[1-\left(r+\frac{2}{k}\right)\frac{\ln n}{n}\right]^{\frac{1}{k}},\quad k=1,2\qquad (n>15 \text{ при } k=1,\ n>11 \text{ при } k=2).$$

Оценим далее радиус однолистности $F_n(\zeta)$ в классе $\sum^{(k)}$.

Теорема 3. В классе $\sum^{(k)}$, $k=1,2,\ldots$, при $n>n_k$ справедлива оценка

$$R_n^{(k)}\leqslant\left[1-2\frac{\ln n}{n}\right]^{-\frac{1}{k}},\tag{14}$$

где n_k — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию

$$A_k\sqrt{k}\sqrt{4\ln n+1}\leqslant 8(\ln n)^2,\tag{15}$$

где $A_1=2$ и $A_k=k$ при $k\geqslant 2$.

Пусть $F(\zeta)\in\sum^{(k)}$. Представим $F(\zeta)=F_n(\zeta)+G_n(\zeta)$. Используя связь между классами S^k и $\sum^{(k)}$, получим, что для класса $\sum^{(k)}$ необходимое и достаточное условие однолистности в $|\zeta|>R$ функции $F(\zeta)$, регулярной в $R<|\zeta|<\infty$, будет $\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\neq 0$ при всех $|\zeta_1|=|\zeta_2|=R$. Отсюда получим условие однолистности $F_n(\zeta)$ в виде

$$\left|\frac{F_n(\zeta_1)-F_n(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|-\left|\frac{G_n(\zeta_1)-G_n(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|>0.\tag{16}$$

Неравенство Гельдера и теорема площадей [Голузин, 1966, стр. 49] дают

$$\left|\frac{G_n(\zeta_1)-G_n(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k-1)|a_{\nu k-1}|\frac{1}{\rho^{\nu k}}\leqslant\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k-1)|a_{\nu k-1}|^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k-1)\rho^{-2\nu k}\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu k-1)\rho^{-2\nu k}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(nk-1)(1-\rho^{-2k})+k\rho^{-2k}}}{\rho^{nk}(1-\rho)^{-2k}}.$$

Из (11) и (16) получаем: для того чтобы функция $F_n(\zeta)$ была однолистна в области $|\zeta|>R$, достаточно выполнения неравенства

$$(1-\rho^{-2})-\frac{\sqrt{(nk-1)(1-\rho^{-2k})+k\rho^{-2k}}}{\rho^{nk}(1-\rho^{-2k})}>0$$

или

$$\frac{1-\rho^{-k}}{(1-\rho^{-2})(1+\rho^{-k})}\cdot\frac{\sqrt{nk(1-\rho^{-2k})+k}}{\rho^{nk}(1-\rho^{-k})^2}<1.$$

Полагая здесь $\rho^{-k}=1-2\frac{\ln n}{n}$ и принимая во внимание, что $\rho^{nk}>n^2$ и $\frac{1-\rho^{-k}}{(1-\rho^{-2})(1+\rho^{-k})}\leqslant\frac{1}{2}A_k$, получаем неравенство (15) и заключение теоремы. Вычисления показывают, что $n_1=3$, $n_2=3$, $n_3=5$, $n_4=9$, $n_5=13$.

В работе [M. Reade, 1963] получено условие $R_n^{(1)}\leqslant\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Наука, 1966.

Илиев Л. Приложение одной теоремы Г. М. Голузина об однолистных функциях. ДАН СССР, т. 19, № 4, 1949.

Илиев Л. О конечных суммах однолистных функций. ДАН СССР, т 70, № 1, 1950.

Илиев Л. Теоремы о трижды симметричных однолистных функциях. ДАН СССР, т. 84, № 1, 1952.

Хейман В. К. Многолистные функции. ИЛ, 1960.

Reade M. J. Math. of Japan, 1963.