

УДК 517.535.8

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ

А. М. Журавский

Среднее арифметико-геометрическое $\mathfrak{M}(a, b)$ является общим пределом последовательностей

$$\begin{aligned} a_0, a_1, \dots, a_n, \dots & \quad a_0 = a, \\ b_0, b_1, \dots, b_n, \dots & \quad b_0 = b, \end{aligned}$$

определяемых рекуррентными соотношениями

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Функция $\mathfrak{M}(a, b)$ — однородная бесконечно многозначная функция своих аргументов.

Свойства функции $\mathfrak{M}(a, b)$ были указаны К. Ф. Гауссом. Однако результаты его исследований, опубликованные в посмертных изданиях [Gauss, 1917], представляют лишь отдельные заметки, не связанные единством изложения, и по ним трудно судить о форме законченного изложения предмета. Последнее вызвало многочисленные комментарии [Schering — Gauss, 1866; Günther, 1894; Schlesinger — Gauss, 1917; Dávid, 1913, 1909, 1928], чтобы воссоздать связное изложение свойств среднего арифметико-геометрического, и ряд исследований [Mangoldt, 1875; Lohnstein, 1888; Geppert, 1928; Béla Barna, 1934, 1937] по улучшению или видоизменению отдельных деталей подобной реконструкции. Свойства функции $\mathfrak{M}(a, b)$ вытекают непосредственно из свойств алгоритма, ее определяющего. Между тем предложенные изложения свойств среднего арифметико-геометрического выходят за рамки определяющего алгоритма и привлекают соображения, излишние для достижения поставленной задачи.

Покажем, как связь между ветвями $\mathfrak{M}(a, b)$ может быть получена непосредственно из свойств алгоритма среднего арифметико-геометрического.

Однородность $\mathfrak{M}(a, b)$ относительно аргументов a, b позволяет свести исследование свойств среднего арифметико-геометрического к изучению функции $\mathfrak{M}(z)$, определяемой как среднее арифметико-геометрическое аргументов $a = 1, b = z$.

Функция $\mathfrak{M}(z)$ имеет три точки разветвления: $z = -1, z = 0, z = 1$, причем ее главная ветвь $M(z)$ остается регулярной в области точки $z = 1$. Свойства функции $\mathfrak{M}(z)$ тесно связаны с ее представлением в окрестности точек разветвления.

Проводя исследование, будем сначала считать аргумент вещественным

$$z = x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Сходимость алгоритма среднего арифметико-геометрического [Журавский, 1964] была связана с оценкой разности $a_n - b_n$.

Вместо этой разности рассмотрим функцию

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}, \quad (2)$$

выбирая в указанном промежутке положительное значение корня

$$c_n = \chi_n(x) \geq 0. \quad (3)$$

При x , равном 1, функция $\chi_n(x)$ обращается в 0. Величина c_n так же хорошо, как и разность $a_n - b_n$, характеризует сближение членов a_n, b_n алгоритма среднего арифметико-геометрического.

В самом деле,

$$c_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2} = \frac{a_n - b_n}{2}. \quad (4)$$

Далее имеет место соотношение

$$4a_{n+1}c_{n+1} = (a_n + b_n)(a_n - b_n) = c_n^2. \quad (5)$$

Равенство

$$a_n^2 = b_n^2 + c_n^2, \quad (6)$$

связывающее функции

$$a_n = \varphi_n(x), \quad b_n = \psi_n(x), \quad c_n = \chi_n(x), \quad (7)$$

позволяет заключить, что

$$a_n da_n = b_n db_n + c_n dc_n. \quad (8)$$

Из (6) и (8) следует

$$(b_n^2 + c_n^2) \frac{da_n}{dx} = a_n b_n \frac{db_n}{dx} + a_n c_n \frac{dc_n}{dx},$$

или

$$(b_n^2 + c_n^2) \frac{d \ln a_n}{dx} = b_n^2 \frac{d \ln b_n}{dx} + c_n^2 \frac{d \ln c_n}{dx}.$$

Последнее равенство может быть заменено пропорцией

$$\frac{[\ln(a_n : b_n)]'_x}{c_n^2} = \frac{[\ln(c_n : a_n)]'_x}{b_n^2}.$$

Присоединение к полученной пропорции производной приводит к равенствам

$$\frac{[\ln(c_n : b_n)]'_x}{a_n^2} = \frac{[\ln(c_n : a_n)]'_x}{b_n^2} = \frac{[\ln(a_n : b_n)]'_x}{c_n^2} = t_n. \quad (9)$$

Между t_n и t_{n+1} существует простая зависимость, непосредственно вытекающая из (9).

В самом деле

$$t_{n+1} dx = \frac{1}{c_{n+1}^2} \left(\frac{da_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{db_{n+1}}{b_{n+1}} \right) = \frac{4}{(a_n - b_n)^2} \left(\frac{da_n + db_n}{a_n + b_n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{da_n}{a_n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{db_n}{b_n} \right), \quad (10)$$

как следует из (4) и определения алгоритма среднего арифметико-геометрического. Очевидное преобразование правой части полученного равенства дает соотношение

$$t_{n+1} dx = \frac{2}{a_n^2 - b_n^2} \left(\frac{da_n}{a_n} - \frac{db_n}{b_n} \right) = \frac{2}{c_n^2} d \ln(a_n : b_n) = 2t_n dx,$$

показывающее, что $t_{n+1} = 2t_n$.

Из (10) следует, что

$$t_n = 2^n t_0. \quad (11)$$

Величина t_0 согласно (9) дается равенством

$$\frac{[d \ln(a_0 : b_0)]}{c_0^2} = t_0 dx.$$

Принимая во внимание, что $a_0 = 1$, $b_0 = x$, $c_0 = \sqrt{1 - x^2}$, получаем

$$t_0 = \frac{1}{x(x^2 - 1)}. \quad (12)$$

Равенства (9) и (11) позволяют выразить члены a_n , b_n , c_n алгоритма среднего арифметико-геометрического через соответствующие производные его прочих членов

$$a_n^2 = 2^{-n} P\left(\frac{c_n}{b_n}\right), \quad b_n^2 = 2^{-n} P\left(\frac{c_n}{a_n}\right), \quad c_n^2 = 2^{-n} P\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \quad (13)$$

где оператор $P(u)$ определяется равенством

$$P(u) = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{d \ln u}{dx} = x(x^2 - 1) \frac{d \ln u}{dx}. \quad (14)$$

Оператор $P(u)$ удовлетворяет соотношению

$$P(u : v) = P(u) - P(v). \quad (15)$$

Первое из равенств (13) после дифференцирования и очевидных преобразований доставляет соотношение

$$2 \frac{d \ln a_n}{dx} P\left(\frac{c_n}{b_n}\right) \frac{d}{dx} \left\{ P\left(\frac{c_n}{b_n}\right) \right\} = \frac{d}{dx} P\left(\frac{c_n a_n}{a_n b_n}\right),$$

из которого в силу (15) следует, что

$$Q(c_n, a_n) = Q(a_n, b_n), \quad (16)$$

где оператор $Q(u, v)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \frac{2}{t_0} = [\ln u]' \cdot \frac{d \ln v}{dx} - \frac{dP(uv)}{dx} = \\ &= \frac{2}{t_0} \cdot \frac{d \ln u}{dx} \cdot \frac{d \ln v}{dx} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{t_0} \cdot \frac{d \ln uv}{dx} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Легко видеть, что

$$Q(u, v) = Q(v, u), \quad (18)$$

$$Q(uv, w) = Q(u, v) + Q(u, w) + \frac{dP(u)}{dx}. \quad (19)$$

Если k — постоянная величина, то

$$Q(ku, v) = Q(u, v). \quad (20)$$

Следствием (18) и (19) является соотношение

$$Q(uv, w) = Q(u, v) + Q(v, w) + \frac{dP(w)}{dx}. \quad (21)$$

Следствием (18) и (20) будет

$$Q(u, kv) = Q(u, v). \quad (22)$$

Второе из равенств (13) позволяет установить соотношение

$$Q(a_n, b_n) = Q(b_n, c_n). \quad (23)$$

Таким образом,

$$Q(a_n, b_n) = Q(b_n, c_n) = Q(c_n, a_n) = T_n. \quad (24)$$

В частности, в силу (12)

$$T_0 = Q(1, x) = - \left[x(x^2 - 1) \frac{d \ln x}{dx} \right]' = -2x. \quad (25)$$

Свойства оператора $Q(u, v)$ и алгоритма среднего арифметико-геометрического легко позволяют показать, что

$$T_{n+1} = T_n. \quad (26)$$

Действительно, в силу (18) и (19) и свойства алгоритма среднего арифметико-геометрического

$$\begin{aligned} 2T_n &= Q(c_n, a_n) + Q(c_n, b_n) = Q(c_n, a_n b_n) - \\ &- \frac{dP(c_n)}{dx} = Q(c_n, b_{n+1}^2) - \frac{dP(c_n)}{dx} = 2Q(c_n, b_{n+1}). \end{aligned}$$

В силу свойств (20) и (21) оператора Q и соотношения (5)

$$\begin{aligned} 2T_{n+1} &= Q(a_{n+1}, b_{n+1}) + Q(c_{n+1}, b_{n+1}) = Q(a_{n+1} c_{n+1}, b_{n+1}) - \frac{dP(b_{n+1})}{dx} = \\ &= Q\left(\frac{c_n^2}{4}, b_{n+1}\right) - \frac{dP(b_{n+1})}{dx} = 2Q(c_n, b_{n+1}). \end{aligned}$$

Из указанных равенств

$$2T_n = 2T_{n+1},$$

что и доказывает (26). Равенство (26) равносильно

$$T_n = T_0. \quad (27)$$

Используем равенства

$$T_n(x) = T_0(x) \quad (28)$$

и

$$T_n(x') = T_0(x'), \quad (29)$$

полагая аргументы x и x' связанными соотношением

$$x^2 + x'^2 = 1. \quad (30)$$

Из (30) согласно (25) следует

$$T_0(x) dx + T_0(x') dx' = 0.$$

Откуда в силу (28) и (29)

$$T_n(x) dx + T_n(x') dx' = 0. \quad (31)$$

Первое слагаемое в левой части (31) согласно (17) и (24) представляется в виде

$$\begin{aligned} T_n(x) dx &= \frac{2}{t_0(x)} [\ln a_n(x)]'_x [\ln b_n(x)]'_x dx - \\ &- \left[\frac{1}{t_0(x)} [\ln a_n(x) b_n(x)]'_x \right]_x dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Второе слагаемое

$$\begin{aligned} T_n(x') dx' &= \frac{2}{t_0(x')} [\ln a_n(x')]_{x'}' [\ln b_n(x')]_{x'}' dx' - \\ &- \left[\frac{1}{t_0(x')} [\ln a_n(x') b_n(x')]_{x'}' \right]_{x'}' dx'. \end{aligned} \quad (33)$$

При переходе от производных по x' к производным по x (33) принимает вид

$$\begin{aligned} T_n(x') dx' &= - \frac{2}{t_0(x)} [\ln a_n(x')]_{x'}' [\ln b_n(x')]_{x'}' dx + \\ &+ \left[\frac{1}{t_0(x)} [\ln a_n(x') b_n(x')]_{x'}' \right]_x' dx, \end{aligned} \quad (34)$$

так как согласно (12) и (30) $t_0(x) dx + t_0(x') dx' = 0$.

Равенства (31), (32) и (34) показывают, что

$$\frac{2}{t_0(x)} \{ [\ln a_n(x)]'_x [\ln b_n(x)]'_x - [\ln a_n(x')]'_x [\ln b_n(x')]'_x \} - \left[\frac{1}{t_0(x)} \left[\ln \frac{a_n(x) b_n(x)}{a_n(x') b_n(x')} \right]'_x \right]' = 0. \quad (35)$$

При беспределном увеличении n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = M(x) \quad (36)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x') = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x') = M(x'). \quad (37)$$

Аналитический характер функций в равенствах (36) и (37), равномерная сходимость к предельным функциям $M(x)$ и $M(x')$ в промежутке $(\epsilon, 1 - \epsilon)$, $(\epsilon > 0$ и сколь угодно мало) и отсутствие у них нулей в указанном промежутке [Журавский, 1964] позволяют сделать заключение о существовании предельного значения левой части (35) в том же промежутке и о справедливости равенства

$$\frac{2}{t_0(x)} \{ ([\ln M(x)]'_x)^2 - ([\ln M(x')]'_x)^2 \} - \left[\frac{1}{t_0(x)} \left[\ln \frac{M^2(x)}{M^2(x')} \right]'_x \right]' = 0.$$

Последнее может быть представлено в виде

$$\frac{2}{t_0(x)} \left[\ln \frac{M(x)}{M(x')} \right]'_x [\ln M(x) M(x')]'_x = \left[\frac{2}{t_0(x)} \left[\ln \frac{M(x)}{M(x')} \right]'_x \right]'_x. \quad (38)$$

Равенство (38) показывает, что

$$\frac{1}{t_0(x)} \left[\ln \frac{M(x)}{M(x')} \right]'_x = C M(x) M(x'), \quad (39)$$

где C — вещественная постоянная. Равенство (39) преобразуется к виду

$$\left[\frac{M(x')}{M(x)} \right]'_x = -C t_0(x) M^2(x'). \quad (40)$$

Функции

$$F_1(z) = \left[\frac{M(z')}{M(z)} \right]'_z \quad (41)$$

и

$$F_2(z) = -C t_0(z) M^2(z') \quad (42)$$

комплексной переменной $z = x + iy$, где

$$z' = \sqrt{1 - z^2} = x' + iy', \quad x' \geq 0, \quad (43)$$

совпадают согласно (40) на отрезке $\delta \leq x \leq 1 - \delta$ ($\delta \geq 0$).

Отсюда

$$F_1(z) = F_2(z) \quad (44)$$

во всей области существования $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Функция $M(z')$ регулярна внутри круга $|z' - 1| \leq 1$.

Из (43) следует ее регулярность внутри круга $|z| \leq 1$. Значение, принимаемое $M(z')$ в центре этого круга, $M(z') = M(1) = 1$.

Функция

$$t_0(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$$

имеет внутри круга полюс первого порядка. Функция $F_2(z)$ представляется в виде

$$F_2(z) = \frac{C}{z} (1 + \varphi(z)), \quad (45)$$

где $\varphi(z)$ — четная функция, регулярная внутри единичного круга с центром в начале координат.

Следует отметить, что $\varphi(z)$ принимает вещественные значения на отрезке $(0, 1)$ вещественной оси и удовлетворяет соотношению $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$, где $\bar{z}$ — величина, сопряженная с z .

Из (41), (44) и (45) следует

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{M(z')}{M(z)} \right) = \frac{C}{z} (1 + \varphi(z)). \quad (46)$$

Равенство (46) позволяет сделать вывод

$$\frac{M(z')}{M(z)} = C \ln z + f(z), \quad (47)$$

где $f(z)$ — четная функция z , принимающая вещественные значения на отрезке $(0, 1)$ вещественной оси и, следовательно, удовлетворяющая соотношению

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}. \quad (48)$$

Значение постоянной C легко находится из (47), если положить $z = i$. В этом случае

$$M(i) = M\left(\frac{1+i}{2}, \sqrt{i}\right) = \frac{1+i}{2} M(1, \sqrt{2}) = \frac{1+i}{2} M(\sqrt{2})$$

и

$$M_{z=i}(z') = M(1, \sqrt{2}) = M(\sqrt{2}).$$

В силу четности $f(z)$ и соотношения (48) $f(i) = f(-i) = \overline{f(i)} = A$, где A — число вещественное.

Из (47) следует

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-1} = C \ln i + A = C \frac{\pi}{2} i + A.$$

Постоянная C — число вещественное. Сравнение мнимых частей в полученном равенстве показывает

$$-1 = \frac{\pi}{2} C, \text{ откуда } C = -\frac{2}{\pi}.$$

Равенство (47) окончательно представляется в виде

$$\frac{M(z')}{M(z)} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{z} + f(z). \quad (49)$$

Равенство (49) позволяет указать аналитическое продолжение $M(z)$ при обходе точки $z = 0$.

В окрестности $z = 0$ функции $M(z')$ и $f(z)$ регулярны. Аналитическое продолжение $\mathfrak{M}(z)$ в результате k -кратного обхода, выразится равенством

$$\frac{M(z')}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{z} - 4ki + f(z). \quad (50)$$

Таким образом, в силу (49) и (50)

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1}{M(z)} - \frac{4ki}{M(z')} \quad (51)$$

Положительное значение k соответствует обходу в положительном направлении. Формула (51) дает выражение ветвей среднего арифметико-геометрического через главные ветви $M(z)$ и $M(z')$. Это выражение было указано К. Ф. Гауссом [1866] и приводится в комментариях Е. Шеринга [Schering — Gauss, 1866] и Л. Шлессингера [Schlesinger — Gauss, 1917].

Если обозначить через $M^-(z)$ значения главной ветви на нижнем крае разреза вдоль вещественной оси от точки 0 до точки -1 , а через $M^+(z)$ ее значения на верхнем его крае (рис. 1), то из (51) следует

$$\frac{1}{M^-(z)} = \frac{1}{M^+(z)} + \frac{4i}{M(z')}. \quad (52)$$

При переходе из точки z в точку $-z$ (рис. 2) без перехода разреза $M(z)$ переходит в $M(-z)$ и из (49) в силу четности $f(z)$ и $M(z')$ следует

$$\frac{M(z')}{M(-z)} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{z} \pm 2i + f(z). \quad (53)$$

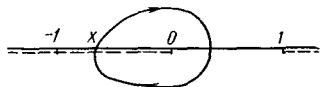


Рис. 1.

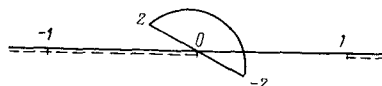


Рис. 2.

Знак в правой части равенства одинаков со знаком мнимой части z или, точнее, одинаков со знаком мнимой части в той полуплоскости с разрезами, где находится точка z . В силу (49) и (53)

$$\frac{1}{M(-z)} = \frac{1}{M(z)} + \frac{2i}{M(z')} \varepsilon(z), \quad (54)$$

где

$$\varepsilon(z) = \pm 1. \quad (55)$$

Знак плюс берется в (55) в том случае, когда z принадлежит верхней полуплоскости с разрезами, знак минус — в противоположном случае. При переходе разреза между -1 и 0 значение $\Re(-z)$ может оказаться и не главной ветвью $M(-z)$, но всегда

$$\frac{1}{\Re(-z)} = \frac{1}{M(z)} \mp \frac{2i}{M(z')}. \quad (56)$$

Верхний знак соответствует тому случаю, когда переход от z к $-z$ связан с вращением вектора, изображающего z в положительном направлении, нижний — противоположному случаю. Функция $M(z')$ остается при этом неизменной. Пользуясь (56), легко решить вопрос об изменении $M(z')$ при обходе точки $z = 1$. При обходе этой точки z' изменяет свой знак, переходя от значения z' к значению $-z'$. Если обход точки $z = 1$ происходит в ее окрестности, то переход от z' к $-z'$ совершается в окрестности точки $z' = 0$ (рис. 3).

Значением $\Re^*(z')$, полученным из $M(z')$ в результате обхода точки $z = 1$, является то значение, которое получается из $M(z')$ при переходе из точки z' в точку $-z'$ в окрестности $z' = 0$. При этом согласно (56) и (43)

$$\frac{1}{\Re^*(z')} = \frac{1}{M(z')} \mp \frac{2i}{M(z)}, \quad (57)$$

где $\Re^*(z') = \Re(\sqrt{1-z^2})$.

При подобном обходе значение вещественной части z в окрестности точки $z = 1$ остается положительным и функция $M(z)$ в результате обхода

точки $z = 1$ в ее окрестности не изменяется. Верхний знак соответствует обходу в положительном направлении, нижний — обходу в отрицательном направлении. Из (57) получается зависимость между значениями $M^+(z')$, $M^-(z')$ функции $M(z')$ на верхнем и нижнем краях разреза вещественной оси плоскости z от $+1$ до $+\infty$ (рис. 4)

$$\frac{1}{M^-(z')_{(1, \infty)}} = \frac{1}{M^+(z')_{(1, \infty)}} - \frac{2i}{M(z)}. \quad (58)$$

Значения функции $M(z)$ на краях разреза $(1, +\infty)$ одинаковы $M^-(z) = M^+(z) = M(x)$.



Рис. 3.

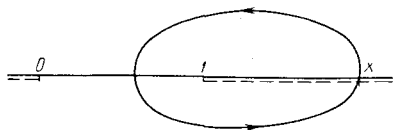


Рис. 4.

При обходе z точки $z = -1$ в ее окрестности $-z = z_1$ обходит точку $z_1 = 1$ в окрестности последней. Об изменении $M(z)$ при обходе точки $z = -1$ можно получить представление, определив изменение $M(z_1)$ при обходе точки $z_1 = 1$ (рис. 5).

В силу (54)

$$\frac{1}{M(z)} = \frac{1}{M(z_1)} + \frac{2i\varepsilon(z_1)}{M(z'_1)}. \quad (59)$$

При обходе в положительном направлении $M(z)$ переходит в $\mathfrak{M}(z)$. Величина $M(z_1)$ не изменяется. Величина $M(z'_1)$ получает значение $\mathfrak{M}^*(z'_1)$, определяемое согласно (57) равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z'_1)} = \frac{1}{M(z'_1)} - \frac{2i}{M(z_1)}. \quad (60)$$

После обхода точки $z = -1$ равенство (59) обращается в соотношение

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1}{M(z_1)} + \frac{2i\varepsilon(z_1)}{\mathfrak{M}^*(z'_1)}. \quad (61)$$

Из (60) и (61) следует

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1 + 4\varepsilon_1(z)}{M(z_1)} + \frac{2i\varepsilon(z_1)}{M(z'_1)}. \quad (62)$$

Исключение $M(z_1)$ из (59) и (62) доставляет равенство

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1 + 4\varepsilon(z_1)}{M(z)} - \frac{8i}{M(z'_1)}. \quad (63)$$

Величина

$$\varepsilon(z_1) = -\varepsilon(z). \quad (64)$$

Значение

$$M(z'_1) = M(z') \quad (65)$$

согласно равенству

$$z'_1 = \sqrt{1 - z_1^2} = \sqrt{1 - z^2} = z'.$$

Из (63) в силу (64) и (65) следует

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1-4\varepsilon(z)}{M(z)} - \frac{8i}{M(z')} \quad (66)$$

При обходе $z = -1$ в отрицательном направлении справедливо равенство

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1+4\varepsilon(z)}{M(z)} + \frac{8i}{M(z')} \quad (67)$$

Равенство (67) устанавливается тем же путем, что и (66).

Значение $\mathfrak{M}^*(z')$ после обхода точки $z = -1$ в положительном направлении получается из (65) и (57). Оно определяется равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \frac{1}{M(z')} - \frac{2i}{M(z_1)},$$

откуда в силу (59), (64) и (65) следует

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \frac{1+4\varepsilon(z)}{M(z')} - \frac{2i}{M(z)} \quad (68)$$

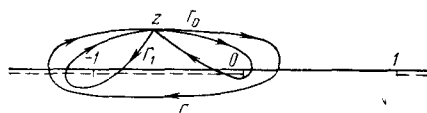


Рис. 6.

При обходе в отрицательном направлении равенство (68) заменяется равенством

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z')} = \frac{1-4\varepsilon(z)}{M(z')} + \frac{2i}{M(z)} \quad (69)$$

Значения $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, получаемые в результате обхода точки $z = -1$ и $z = 0$ совместно, можно рассматривать как результат последовательного обхода этих точек раздельно. Так, обход в отрицательном направлении из точки z , лежащей в верхней полуплоскости по линии Γ , равносильен последовательному обходу точки $z = 0$ по линии Γ_0 и точки $z = -1$ по линии Γ_1 (рис. 6).

Обход точки $z = 0$ согласно (51) доставляет значение

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_0(z)} = \frac{1}{M(z)} \mp \frac{4i}{M(z)} \quad (70)$$

Верхний знак отвечает обходу в положительном направлении, нижний — обходу в отрицательном направлении. Функция $\mathfrak{M}_0(z')$ возвращается при этом к исходному значению $M(z')$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_0(z')} = \frac{1}{M(z')} \quad (71)$$

После дальнейшего обхода точки $z = -1$ из (70) и (71) следует

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1(z)} \mp \frac{4i}{\mathfrak{M}_1^*(z')} \quad (72)$$

и

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1^*(z')} \quad (73)$$

где $\mathfrak{M}_1(z)$ и $\mathfrak{M}_1^*(z')$ — значения $M(z)$ и $M(z')$, получающиеся в результате обхода точки $z = -1$.

Согласно (67) и (66)

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_1(z)} = \frac{1 \mp 4\varepsilon(z)}{M(z)} \mp \frac{8i}{M(z')} \quad (74)$$

Согласно (68) и (69)

$$\frac{1}{\mathfrak{M}_1^+(z')} = \mp \frac{2i}{M(z)} + \frac{1 \pm 4\varepsilon(z)}{M(z')} \quad (75)$$

В равенствах (74) и (75) верхние знаки соответствуют обходу в положительном направлении, нижние — обходу в отрицательном направлении. Из (72), (74) и (75)

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{-7 \mp 4\varepsilon(z)}{M(z)} + \frac{\mp 12 - 16\varepsilon(z)}{M(z')} i. \quad (76)$$

Из (73) и (75)

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \mp \frac{2i}{M(z)} + \frac{1 \pm 4\varepsilon(z)}{M(z')} \quad (77)$$

В равенствах (76) и (77) верхние знаки соответствуют обходу в положительном направлении, нижние — обходу в отрицательном. Полученные равенства позволяют установить связь между значениями функций $M(z)$ и $M(z')$ на краях разреза $(-\infty, -1)$ (рис. 7).

Переход из точки z на верхнем крае разреза $(-\infty, -1)$ в точку z на нижнем его крае без пересечения разрезов совершается в отрицательном направлении. Полагая в равенствах (76) и (77) $\varepsilon(z) = +1$ и беря в них нижние знаки, легко получить соотношения

$$\frac{1}{M^-(z)} = \frac{-3}{M^+(z)} - \frac{4i}{M^+(z')} \quad (78)$$

и

$$\frac{1}{M^-(z')} = \frac{2i}{M^+(z)} - \frac{3}{M^+(z')} \quad (79)$$

где $M^+(z)$ и $M^-(z)$ — величина $M(z)$ на верхнем и нижнем краях разреза $(-\infty, -1)$.

Функции $M(z)$ и $M(z')$ однозначны на плоскости с разрезами, но теряют свою однозначность при их переходе. Продолжением главных ветвей $M(z)$ и $M(z')$, получаемым при переходе разрезов с нижнего края на верхний, являются ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, определяемые равенствами

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z')} = \frac{\alpha}{M(z')} + \frac{\beta i}{M(z)}, \quad (80)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z)} = \frac{\gamma i}{M(z')} + \frac{\delta}{M(z)}. \quad (81)$$

При переходе разреза $(1, \infty)$

$$\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 0, \delta = 1. \quad (82)$$

При переходе разреза $(-1, 0)$

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 4, \delta = 1. \quad (83)$$

При переходе разреза $(-\infty, -1)$

$$\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -4, \delta = -3. \quad (84)$$

В самом деле, при переходе с нижнего края разреза (a, b) на верхний путем аналитического продолжения на верхнем краю разреза получаются значения

$$\mathfrak{M}(z) = M^-(z), \quad \mathfrak{M}^*(z') = M^-(z'),$$

(a, b)
 (a, b)
 (a, b)
 (a, b)

связанные со значениями $M^+(z)$ и $M^+(z')$ соотношениями

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \frac{\alpha}{M^+(z')} + \frac{\beta i}{M^+(z)},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{\gamma i}{M^+(z')} + \frac{\delta}{M^+(z)},$$

(a, b)
 (a, b)
 (a, b)
 (a, b)

коэффициенты которых определяются равенствами (82), (83), (84), как это следует из (52), (58), (78) и (79). При дальнейшем продолжении на плоскости с разрезами из последних равенств вытекают соотношения (80) и (81). Переход разрезов с верхнего края на нижний дает в качестве аналитического продолжения ветви, определяемые теми же равенствами (80) и (81), но с иными коэффициентами.

При переходе разреза $(1, \infty)$

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 0, \delta = 1. \quad (85)$$

При переходе разреза $(-1, 0)$

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -4, \delta = 1. \quad (86)$$

При переходе разреза $(-\infty, -1)$

$$\alpha = -3, \beta = -2, \gamma = 4, \delta = -3. \quad (87)$$

Равенства (80) и (81) с коэффициентами (85), (86), (87) следуют из соотношений

$$\mathfrak{M}(z) = M^+(z), \quad \mathfrak{M}^*(z') = M^+(z')$$

(a, b)
 (a, b)
 (a, b)
 (a, b)

и равенств

$$\frac{1}{\mathfrak{M}^*(z')} = \frac{\alpha}{M^-(z')} + \frac{\beta i}{M^-(z)},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(z)} = \frac{\gamma i}{M^-(z')} + \frac{\delta}{M^-(z)},$$

(a, b)
 (a, b)
 (a, b)
 (a, b)

легко выводимых из (52), (58), (78) и (79). Ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, получаемые одинаковым аналитическим продолжением главных ветвей $M(z)$ и $M(z')$, будут в дальнейшем называться сопряженными. Равенства (80) и (81) показывают, что величины, обратные сопряженным ветвям, являются линейными функциями величин, обратных главным ветвям. Элементы матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta i \\ \gamma i & \delta \end{pmatrix}, \quad (88)$$

характеризующей сопряжение ветви, удовлетворяют условиям

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}, \quad \beta \equiv 0 \pmod{2}, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{4} \quad (89)$$

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1, \quad (90)$$

как то следует из (82), (83), (84), (85), (86) и (87). Матрица T является унитарной.

Матрица T_* , являющаяся произведением матриц T' и T'' типа (88), с элементами, удовлетворяющими условиям (89) и (90), представляет матрицу того же типа с элементами, удовлетворяющими условиям (89) и (90). В самом деле

$$T_* = T' T'' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' i \\ \gamma' i & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' i \\ \gamma'' i & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \alpha'' - \beta' \gamma'', (\alpha' \beta'' + \beta' \delta'') i \\ (\gamma' \alpha'' + \delta' \gamma'') i & \delta' \delta'' - \gamma' \beta'' \end{pmatrix}.$$

Причем согласно (89)

$$\begin{aligned} \alpha_* &= \alpha' \alpha'' - \beta' \gamma'' \equiv 1 \cdot 1 - 0 \equiv 1 \pmod{4}, \\ \beta_* &= \alpha' \beta'' + \beta' \delta'' \equiv 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{2}, \\ \gamma_* &= \gamma' \alpha'' + \delta' \gamma'' \equiv 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \delta_* &= \delta' \delta'' - \gamma' \beta'' \equiv 1 \cdot 1 - 0 \equiv 1 \pmod{4}, \\ \alpha_* \delta_* + \beta_* \gamma_* &= (\alpha' \delta' + \beta' \gamma') (\alpha'' \delta'' + \beta'' \gamma'') = 1. \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что сопряженные ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, получающиеся в результате повторного перехода разрезом, выражаются через главные $M(z)$, $M(z')$ равенствами (80) и (81). Любое аналитическое продолжение главных ветвей связано с определенной последовательностью переходов разрезом. Сопряженные ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, ему соответствующие, выражаются через главные равенствами (80) и (81), которые содержат все ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$.

Вопрос о том, всякая ли система (80) и (81) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (89) и (90), представляет сопряженные ветви функций $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$, эквивалентен вопросу: всякая ли матрица (88) может быть представлена как произведение конечного числа матриц с элементами, определяемыми одним из условий (82), (83), (84) или (85), (86), (87).

Пусть U , V , S обозначают матрицы, элементы которых определяются соответственно условиям (82), (83) и (84).

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -3 & +2i \\ -4i & -3 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Матрицы U^{-1} , V^{-1} , S^{-1} имеют элементы, удовлетворяющие соответственно условиям (85), (86) и (87). Если $|\beta| > |\alpha|$, то при умножении матрицы T на одну из матриц U или U^{-1} в матрице

$$T_1 = T U^g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 i \\ \gamma_1 i & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad (g = \pm 1).$$

Элементы α_1 и β_1 будут удовлетворять неравенству

$$|\alpha_1| + |\beta_1| < |\alpha| + |\beta|. \quad (92)$$

Из равенства $\beta_1 = \beta - 2g\alpha$ следует, что при соответствующем выборе значения g

$$|\beta_1| = ||\beta| - 2|\alpha|| < |\beta|, \quad (93)$$

ибо $-|\beta| < |\beta| - 2|\alpha| < |\beta|$. Очевидно, что

$$\alpha_1 = \alpha. \quad (94)$$

Из (93) и (94) следует (92). Если $0 < 2|\beta| < |\alpha|$, то в произведении

$$T_1 = T V^h = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 i \\ \gamma_1 i & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad (h = \pm 1)$$

элементы α_1 и β_1 удовлетворяют неравенству (92). В самом деле, из равенства $\alpha_1 = 4h\beta + \alpha$ при соответствующем выборе значения h следует

$$|\alpha_1| = ||\alpha| - 4|\beta|| < |\alpha|, \quad (95)$$

ибо $-|\alpha| < |\alpha| - 4|\beta| < |\alpha|$.

Соотношение

$$\beta_1 = \beta \quad (96)$$

очевидно. Из (95) и (96) следует справедливость (92). Если же $0 < |\beta| < 1 < |\alpha| < 2|\beta|$, то элементы первой строки произведения

$$T_1 = TS^j = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1^i \\ \gamma_1^i & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad (j = \pm 1)$$

удовлетворяют неравенству (92). В самом деле, элементы первой строки матрицы T_1 даются равенствами $\alpha_1 = -3\alpha + 4j\beta$, $\beta_1 = -3\beta + 2j\alpha$.

При выборе знака j , одинакового со знаком произведения $\alpha\beta$, имеет место неравенство

$$|\beta_1| = |2|\alpha| - 3|\beta|| < |\beta|, \quad (97)$$

ибо $-|\beta| < 2|\alpha| - 3|\beta| < |\beta|$.

При том же выборе знака выполняется и второе неравенство

$$|\alpha_1| = |-4|\beta| + 3|\alpha|| < |\alpha|, \quad (98)$$

ибо $-|\alpha| < 3|\alpha| - 4|\beta| < |\alpha|$.

Неравенства (97) и (98) убеждают в справедливости (92). Полученный результат показывает, что при условии $|\beta| > 0$ матрица T всегда может быть умножена на такую матрицу

$$W = U^a V^b S^c, \quad (99)$$

что элементы матрицы произведения

$$U_1 = TW \quad (100)$$

будут удовлетворять условию (92).

Из трех величин a , b , c две равны нулю, а третья ± 1 . Если $\beta = 0$, то элементы α , δ матрицы T в силу (90) удовлетворяют условию $\alpha\delta = 1$, откуда согласно (89) следует $\alpha = \delta = 1$.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma^i & 1 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

где $\gamma = 4h$.

Имея матрицу T , где элемент $\beta \neq 0$, можно построить последовательно систему матриц $T_1, \dots, T_k, \dots, T_n$, определяемых равенством

$$T_{k+1} = T_k W_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (102)$$

Матрицы W_k имеют вид (99)

$$W_k = U^{a_k} V^{b_k} S^{c_k}$$

и выбираются так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha_{k+1}| + |\beta_{k+1}| < |\alpha_k| + |\beta_k|, \quad (|\beta_k| > 0).$$

Построение прекращается при достижении матрицы T_n , где $\beta_n = 0$. Матрица T_n достигается в результате конечного числа преобразований, ибо число целых чисел $m_k = |\alpha_k| + |\beta_k|$, удовлетворяющих условию $m > m_1 > \dots > m_k > m_{k+1} > \dots$, число конечное.

Из соотношения (102) следует, что $TW_1 \dots W_n = T_n$ и согласно (90) $T = V^h W_n^{-1} \dots W_1^{-1}$.

Последнее равенство может быть представлено в виде

$$T = V^h \Pi S^{-c_k} V^{-b_k} U^{-a_k}. \quad (103)$$

Равенство (102) показывает, что любая матрица вида (88), элементы которой удовлетворяют условиям (89) и (90), является произведением степеней матриц U , V , S .

Таким образом, любая пара функций, определяемых равенствами (80) и (81), с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (89) и (90), представляет сопряженные ветви $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}^*(z')$ и может быть получена из главных ветвей $M(z)$ и $M(z')$ при их соответствующем аналитическом продолжении.

ЛИТЕРАТУРА

- Журавский А. М. Алгоритм среднего арифметико-геометрического. Зап. ЛГИ, т. XLIII, вып. 3, 1964.
 B é l a B a r n a. J. reine und angew. Math. Bd 172, 1934; Bd 178, 1937.
 D á v i d L. Rend. Circolo mat. Palermo, vol. 35, 1913.
 D á v i d L. J. reine und angew. Math. Bd 135, 1909; Bd 159, 1928.
 G a u s s C. F. Werke, Bd 3, 1866; Bd 10, 1917.
 G e p p e r t H. Math. Ann., Bd 99, 1928.
 G ü n t h e r P. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. — phys. Kl. IIa, 1894.
 L o h n s t e i n Th. Z. Math. und Phys., Bd 33, 1888.
 M a n g o l d t H. Z. Math. und Phys., Bd 20, 1875.
 S c h e r i n g - G a u s s C. F. Werke, Bd 3, 1866.
 S c h l e s i n g e r - G a u s s C. F. Werke, Bd 10, 1917.