Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XLVIII, вып. 3, 1968 г.

УДК 517.558

ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА БОРХАРДТА

М. И. Вейнгер

Алгоритм среднего арифметико-геометрического из двух элементов, составляющий пример приближения многозначной трансцендентной функции одного переменного посредством алгебраической, введен в рассмотрение К. Ф. Гауссом.

В работах В. Борхардта [1876, 1878] и более поздних публикациях Г. Хеттнера [1880, 1893] и Х. Гепперта [1929] проводится исследование алгоритма среднего арифметико-геометрического из четырех элементов, являющегося обобщением алгоритма Гаусса. Интересно рассмотреть обобщение алгоритма среднего арифметико-геометрического из четырех элементов, указанное В. Борхардтом [1876] и приводящее к изучению трансцендентной функции многих переменных с помощью алгебраической.

Применим к исследованию обобщенного алгоритма Борхардта методы, использованные для изучения алгоритма среднего арифметико-геометрического из двух элементов А. М. Журавским [1964] и из четырех элементов автором [Вейнгер, 1964].

Пусть имеется символ $(\alpha_1,\alpha_2 \ldots \alpha_\rho)$, где

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, \rho.$$

Обозначим

$$(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\rho) = (\alpha). \tag{1}$$

Считаем, что $(\alpha) = (\beta)$, если $\alpha_i = \beta_i$ при каждом i. Обозначим $(\alpha) = (0)$, если $\alpha_i = 0$ при всех i. Будем считать, что

$$(\sigma) + (\tau) = (\alpha), \tag{2}$$

если

$$\sigma_i + \tau_i \equiv \alpha_i \pmod 2, \tag{3}$$

при каждом $i = 1, 2, \ldots, \rho$.

Построению обобщенного алгоритма Борхардта предпошлем ряд теорем.

Теорема 1. При заданном (α) для каждого (σ) найдется одно и только одно (τ) такое, чтобы выполнялось равенство (2).

Пусть выбраны $(\alpha) = (\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_\rho)$, $(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho)$ и выполняется равенство (2). Тогда при любом фиксированном $i = 1, 2, \ldots, \rho$ из соотношения $\sigma_i + \tau_i \equiv \alpha_i \pmod 2$ всегда найдется единственное τ_i, принимающее значение либо 0, либо 1. Таким образом будет однозначно построено $(\tau) = (\tau_1\tau_2, \ldots, \tau_\rho)$, удовлетворяющее (2).

Теорема 2. Среди комбинаций $[(\sigma), (\tau)]$, удовлетворяющих (2), нет ни одной, удовлетворяющей соотношению $(\sigma) + (\tau) = (\beta)$, если $\beta \neq \alpha$.

Действительно, пусть $(\sigma) + (\tau) = (\alpha)$ и $(\sigma) + (\tau) = (\beta)$.

Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, \rho$ выполняются соотношения

$$\sigma_i + \tau_i \equiv \alpha_i \pmod 2, \tag{4}$$

$$\sigma_i + \tau_i \equiv \beta_i \pmod 2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует

$$\alpha_i \equiv \beta_i \pmod 2. \tag{6}$$

Из определения α_i и β_i и соотношения (6) имеем $\alpha_i = \beta_i$ при каждом i, т. е. $(\alpha) = (\beta)$.

Теорема 3. Если $(\alpha) = (0)$, то $(\sigma) = (\tau)$.

Пусть $(\alpha) = (\theta)$, т. е. $\alpha_i = 0$ при всех i.

Тогда из (2) $\sigma_i + \tau_i \equiv 0 \pmod 2$.

Из определения σ_i и τ_i следует, что $\sigma_i = \tau_i$ при каждом $i = 1, 2, \ldots, \rho$, т. е. $(\sigma) = (\tau)$.

Нетрудно видеть, что если $(\alpha) \neq (0)$, то каждая комбинация $[(\sigma), (\tau)]$ встречается дважды. Для пояснения приводим пример для случая $\rho = 3$. Пусть $(\alpha) = (001)$. Возможны только следующие комбинации (σ) и (τ):

(σ) (000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)

(τ) (001), (000), (011), (010), (101), (100), (111), (110)

Пусть имеется 2^ρ комплексных чисел $a^{(n)}_{(\sigma)}$, где n — любое из чисел $0, 1, 2, \ldots$

Обобщенный алгоритм Борхардта определим системой равенств

$$2^\rho a^{(n+1)}_{(\alpha)} = \sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} \sqrt{a^{(n)}_{(\sigma)} a^{(n)}_{(\tau)}}, \tag{7}$$

где (α) выбирается согласно (1) и $a^{(0)}_{(\sigma)} = a_{(\sigma)}$. При заданном α число всевозможных комбинаций $[(\sigma), (\tau)]$ равно 2^ρ. Каждая комбинация $[(\sigma), (\tau)]$ встречается при этом дважды, если $(\alpha) \neq (0)$. При $(\alpha) \neq (0)$ число различных слагаемых в правой части (7) равно $2^{\rho-1}$, при $(\alpha) = (0)$ равно 2^ρ, причем правая часть равенства (7) согласно теореме 3 имеет вид $\sum\limits_{(\sigma)} a^{(n)}_{(\sigma)}$.

Число возможных $a^{(n+1)}_{(\alpha)}$ равно 2^ρ, причем число возможных $a^{(n+1)}_{(\alpha)}$ при $(\alpha) \neq (0)$ равно $2^\rho - 1$. Равенство (7) перепишем в виде

$$a^{(n+1)}_{(0)} = \frac{1}{2^\rho} \sum_{(\sigma)} a^{(n)}_{(\sigma)}, \tag{8}$$

$$a^{(n+1)}_{(\alpha)} = \frac{1}{2^{\rho-1}} \sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} \sqrt{a^{(n)}_{(\sigma)} a^{(n)}_{(\tau)}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8'}$$

где $(\alpha) \neq (0)$ и в правой части каждого из равенств (8′) комбинация $[(\sigma), (\tau)]$ встречается только один раз. При построении последовательностей (8′) есть возможность двоякого выбора значения квадратного корня, что создает бесчисленное множество последовательностей (8) и (8′). Среди них выделяется главная, при образовании которой соблюдается правило выбора значения корня, характеризуемое неравенством

$$R\left(\frac{\sqrt{a^{(n)}_{(\sigma)} a^{(n)}_{(\tau)}}}{a^{(n)}_{(\sigma)}}\right) \geqslant 0, \tag{R}$$

где $R(z)$ — вещественная часть числа z и $n = 0, 1, 2, \ldots$ Значение корня, соответствующее неравенству (R), назовем регулярным, а само неравенство — условием регулярности. Назовем регулярными последовательности (8) и (8′), если при их образовании условия (R) нарушаются конечное число раз.

Последовательности (8) и (8′), где при выборе значения корней условия (R) нарушаются бесчисленное множество раз, назовем иррегулярными.

Докажем сходимость последовательностей (8) и (8′), если они регулярны. Оценим близость членов последовательности (8) и любой из (8′).

Обозначим

$$\Delta_{(\alpha)}^{(n)} = a_{(0)}^{(n)} - a_{(\alpha)}^{(n)}, \tag{9}$$

где $(\alpha) \neq (0)$. В силу равенств (8) и (8′), определяющих алгоритм, получим

$$\Delta_{(\alpha)}^{(n+1)} = a_{(0)}^{(n+1)} - a_{(\alpha)}^{(n+1)} = \frac{1}{2^p}\left(\sum_{(\sigma)} a_{(\sigma)}^{(n)} - 2\sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} \sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)} a_{(\tau)}^{(n)}}\right)$$

Тогда

$$\Delta_{(\alpha)}^{(n+1)} = \frac{1}{2^p}\sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} \left(\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)}} - \sqrt{a_{(\tau)}^{(n)}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2^p}\sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} \frac{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)}} - \sqrt{a_{(\tau)}^{(n)}}}{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)}} + \sqrt{a_{(\tau)}^{(n)}}} \left(a_{(\sigma)}^{(n)} - a_{(\tau)}^{(n)}\right).$$

Заметим, что при выполнении условий регулярности для любых комбинаций $[(\sigma), (\tau)]$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)}} - \sqrt{a_{(\tau)}^{(n)}}}{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)}} + \sqrt{a_{(\tau)}^{(n)}}}\right| = \left|\frac{1 - \dfrac{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)} a_{(\tau)}^{(n)}}}{a_{(\sigma)}^{(n)}}}{1 + \dfrac{\sqrt{a_{(\sigma)}^{(n)} a_{(\tau)}^{(n)}}}{a_{(\sigma)}^{(n)}}}\right| \leqslant 1.$$

Обозначим $\Delta^{(n)} = \max |\Delta_{(\alpha)}^{(n)}|$.

Тогда

$$|\Delta_{(\alpha)}^{(n+1)}| \leqslant \frac{1}{2^p}\sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} |a_{(\sigma)}^{(n)} - a_{(\tau)}^{(n)}| \leqslant \frac{1}{2^p}\left[|\Delta_{(\alpha)}^{(n)}| + \sum_{(\sigma)+(\tau)=(\alpha)} |a_{(\sigma)}^{(n)} - a_{(\tau)}^{(n)}|\right].$$

Каждое из слагаемых представим в виде

$$|a_{(\sigma)}^{(n)} - a_{(\tau)}^{(n)}| = |(a_{(0)}^{(n)} - a_{(\tau)}^{(n)}) - (a_{(0)}^{(n)} - a_{(\sigma)}^{(n)})| \leqslant 2\Delta^{(n)}.$$

Тогда

$$|\Delta_{(\alpha)}^{(n+1)}| < \frac{\Delta^{(n)}}{2^p}[1 + 2(2^p - 1)] = \frac{2^p - 1}{2^p}\Delta^{(n)}.$$

Если при переходе от члена с номером m к члену с номером $m+s$ соблюдается условие регулярности, то

$$\Delta^{(m+s)} < \left(\frac{2^p - 1}{2^p}\right)^s \Delta^{(m)}. \tag{10}$$

Неравенство (10) показывает, что для регулярных последовательностей

$$\lim_{n \to \infty} \Delta^{(n)} = 0. \tag{11}$$

Остается показать, что сходится регулярная последовательность (8).

Оценим разность

$$a_{(0)}^{(m+p)} - a_{(0)}^{(m)} = [a_{(0)}^{(m+1)} - a_{(0)}^{(m)}] + [a_{(0)}^{(m+2)} - a_{(0)}^{(m+1)}] + \ldots + [a_{(0)}^{(m+p)} - a_{(0)}^{(m+p-1)}].$$

Согласно (8) можно записать

$$|a_{(0)}^{(m+s+1)} - a_{(0)}^{(m+s)}| \leqslant \frac{1}{2^p}\sum_{(\sigma)} |a_{(\sigma)}^{(m+s)} - a_{(0)}^{(m+s)}| < \frac{2^p - 1}{2^p}\Delta^{(m+s)}.$$

Неравенство (12) с учетом (8) и (8′) позволяет оценить рассматриваемую разность

$$|a_{(0)}^{m+p}-a_{(0)}^{(m)}|\leqslant\frac{1}{2^{\rho}}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{(\sigma)}|a_{(0)}^{(m+s)}-a_{(\sigma)}^{(m+s)}|<$$

$$<\frac{2^{\rho}-1}{2^{\rho}}\sum_{s=0}^{p-1}\Delta^{(m+s)}<\frac{2^{\rho}-1}{2^{\rho}}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{2^{\rho}-1}{2^{\rho}}\right)^{s}\Delta^{(m)}=(2^{\rho}-1)\,\Delta^{(m)}, \qquad (13)$$

если при переходе от члена $a_{(0)}^{(m)}$ к члену $a_{(0)}^{(m+s)}$ соблюдается условие регулярности.

Условия (13) и (11) показывают, что для всякой регулярной последовательности (8) выполняется неравенство

$$|a_{(0)}^{(m+p)}-a_{(0)}^{(m)}|<\varepsilon \qquad (14)$$

при $m>N(\varepsilon)$ (ε — произвольно заданное положительное число, p — произвольное целое число).

Неравенство (14) доказывает существование предела регулярной последовательности (8). Из соотношений (9) и (11) вытекает существование предела любой из регулярных последовательностей (8′), равного пределу последовательности (8).

Итак, существует общий предел последовательности (8) и (8′), если последовательности регулярные.

Можно доказать, что предел иррегулярных последовательностей (8) и (8′) равен нулю. Способ доказательства для частного случая $\rho=2$ изложен автором в предыдущей работе [Вейнгер, 1964].

Общий предел регулярных последовательностей (8) и (8′) в дальнейшем обозначим $\mathfrak{M}\{a_{(\alpha)}\}$, где α определяется равенством (1).

Пусть область D — такая область изменения аргументов $a_{(\alpha)}$, в которой все члены последовательностей (8) и (8′) — однозначные аналитические функции своих аргументов.

Рассмотрим в области D функцию $\mathfrak{M}\{a_{(\alpha)}\}$, которая может быть представлена рядом

$$\mathfrak{M}\{a_{(\alpha)}\}=a_{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_{(0)}^{(n)}-a_{(0)}^{(n-1)}]. \qquad (15)$$

Пусть начиная с номера m при составлении последовательностей (8) и (8′) условия (R) выполнены.

Учитывая (10) и (12), имеем

$$|a_{(0)}^{(m+s+1)}-a_{(0)}^{(m+s)}|<\left(\frac{2^{\rho}-1}{2^{\rho}}\right)^{s+1}\Delta^{(m)}. \qquad (16)$$

Очевидно, что

$$\Delta^{(m)}=\max\{|a_{(\alpha)}^{(m)}-a_{(0)}^{(m)}|\}\leqslant 2\max|a_{(\alpha)}^{(m)}|.$$

Обозначив наибольшее значение $2\max|a_{(\alpha)}^{(m)}|$ в области D через M_D, получим из (16)

$$|a_{(0)}^{(m+s+1)}-a_{(0)}^{(m+s)}|<M_D\left(\frac{2^{\rho}-1}{2^{\rho}}\right)^{s+1}. \qquad (17)$$

Неравенство (17) показывает, что ряд (15) сходится в D равномерно. Следовательно, сумма ряда (15), функция $\mathfrak{M}\{a_{(\alpha)}\}$, является однозначной аналитической функцией своих аргументов. Укажем такую область D комплексного пространства 2^{ρ} измерений, где члены ряда (15) — однозначные и аналитические функции.

Пусть $D_{(\alpha)}$ — область комплексного 2^{ρ}-мерного пространства, в которой

$$\operatorname{Im}a_{(\alpha)}^{(n)}\geqslant l, \qquad (18)$$

где $l>0$.

Если область $D = \prod_{(\alpha)} D_{(\alpha)}$, то неравенство (18) выполняется в области D для всех α.

Покажем, что если начальные аргументы $\{a_{(\alpha)}\}$ принадлежат области D и выполнены условия (R), то и все члены последовательностей (8) и (8′) принадлежат D.

Поясним сказанное для случая $\rho = 2$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что условия регулярности (R) выполняются начиная с $n = 0$.

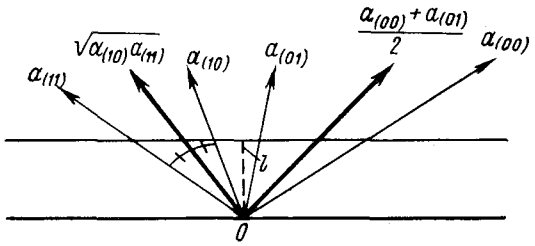
Изобразим (рисунок) начальные аргументы — векторы $a_{(00)}$, $a_{(01)}$, $a_{(10)}$, $a_{(11)}$ на плоскости с вырезанной полосой шириной l. При этом в четырехмерном комплексном пространстве выделяется область D, определяемая неравенствами

$$\operatorname{Im} a_{(00)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a_{(01)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a_{(10)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a_{(11)} \geqslant l.$$

Составление членов последовательностей (8) и (8′) сводится к построению среднего арифметического и среднего геометрического любых пар начальных аргументов. Например,

$$a^{(1)}_{(00)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{(00)} + a_{(01)}}{2} + \frac{a_{(10)} + a_{(11)}}{2}\right),$$

$$a^{(1)}_{(01)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{(00)} a_{(01)}} + \sqrt{a_{(10)} a_{(11)}}\right) \text{ и т. д.}$$



Построение среднего арифметического и среднего геометрического двух векторов.

Из геометрических соображений очевидно, что конец любого вектора, представляющего среднее арифметическое любых двух начальных аргументов, будет принадлежать указанной полуплоскости с вырезом. Если выполнены условия (R), то вектор, представляющий среднее геометрическое любых двух начальных аргументов, направлен вдоль биссектрисы внутреннего угла, образованного соответствующими векторами [Вейнгер, 1964], при этом модуль его $\geqslant l$. Тогда для всех векторов последовательностей (8) и (8′) выполняются неравенства

$$\operatorname{Im} a^{(n)}_{(00)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a^{(n)}_{(01)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a^{(n)}_{(10)} \geqslant l, \quad \operatorname{Im} a^{(n)}_{(11)} \geqslant l. \tag{19}$$

Неравенства показывают, что все члены последовательностей (8) и (8′) принадлежат области D. Аналогичное рассуждение могло быть проведено для произвольного ρ. Учитывая (18), замечаем, что в области D не имеется особых точек алгебраических функций последовательностей (8) и (8′). Следовательно, в области D члены ряда (15) являются однозначными аналитическими функциями 2^ρ аргументов $\{a_{(\alpha)}\}$. Область D — пример области, где трансцендентная функция $\mathfrak{M}\{a_{(\alpha)}\}$, зависящая от 2^ρ аргументов, является однозначной и аналитической.

ЛИТЕРАТУРА

Вейнгер М. И. О сходимости алгоритма В. Борхардта. Зап. ЛГИ, т. XLIII, вып. 3, 1964.

Журавский А. М. Алгоритм среднего арифметико-геометрического. Зап. ЛГИ, т. XLIII, вып. 3, 1964.

Borchardt W. Monatsber. Königl. Akad. Wiss., 1876.

Borchardt W. Abhandl. Königl. Akad. Wiss., 1878.

Geppert H. J. reine und angew. Math., Bd 161, 1929.

Hettner G. J. reine und angew. Math., Bd 89, 1880.

Hettner G. J. reine und angew. Math., Bd 112, 1893.