Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. L, вып. 2, 1966 г.

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСИ БУРОВОЙ СКВАЖИНЫ ПО ЕЕ НАКЛОНУ И АЗИМУТУ В ОТДЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ

А. М. Журавский, А. А. Кржижановская

Пространственное положение буровой скважины определяют обычно по результатам измерения ее наклона θ_k и азимута φ_k в ряде точек M_k, расстояние s_k которых от устья скважины известны * $(k = 1, 2 \ldots)$. Подобное определение сводится либо к вычислению координат оси скважины, либо к графическому ее построению по данным измерения.

В настоящей статье изложен общий способ приближенного определения пространственных координат точек оси скважины и разобраны простейшие приемы их вычисления. Одновременно с приемами приближенного вычисления координат оси скважины указаны правила для приближенной оценки погрешности полученных значений, что позволяет составить суждение о возможном уклонении расчетного положения скважины от действительного. Изложенные правила иллюстрируются примером обработки опытных данных.

Пространственное положение оси скважины отнесем к системе прямоугольных осей, приняв за начало устье скважины и направив ось OZ вертикально вниз (рис. 1). Касательная MT к оси скважины в точке $M(x, y, z)$ образует углы α, β, γ с координатными осями. Зависимость между координатами точки M, находящейся на расстоянии s от ее устья, и углами наклона касательной MT к координатным осям характеризуется равенствами **

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma. \tag{1}$$

Углы α, β, γ определяются по наклону θ и азимуту φ скважины. Они связаны с последними соотношениями

$$\cos\alpha = \cos\varphi \sin\theta, \quad \cos\beta = \sin\varphi \sin\theta \tag{2}$$

и

$$\gamma = \theta. \tag{3}$$

Равенства (1) в силу (2) могут быть заменены уравнениями

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \sin\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi \sin\theta \tag{4}$$

и

$$\frac{dz}{ds} = \cos\theta. \tag{5}$$

* Ушаков И. Н. Горная геометрия. Госгортехиздат, 1962.

** Журавский А. М. Определение пространственного положения буровой скважины по данным измерений. Зап. ЛГИ. Т. XLI, вып. 2, 1961.

Если считать, что θ и φ определены для каждой точки M оси скважины и являются известными функциями дуги s, то координаты x, y, z находятся решением системы дифференциальных уравнений (4), (5) для начальных условий

$$x = y = z = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \tag{6}$$

Введение вспомогательной переменной s^*, определяемой уравнением

$$\frac{ds^*}{ds} = \sin\theta \tag{7}$$

и условием

$$s^* = 0 \qquad \text{при} \quad s = 0, \tag{8}$$

позволяет представить уравнение (4) в виде

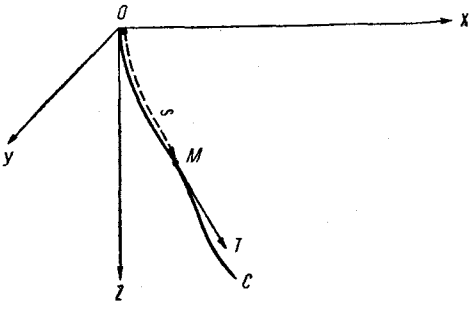


Рис. 1. Изогнутая ось скважины.

$$\frac{dx}{ds^*} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds^*} = \sin\varphi \tag{9}$$

и свести задачу нахождения координат точки оси скважины к последовательному интегрированию сначала системы уравнений (5), (7), а потом системы (9), имеющих одинаковый вид.

Введение переменной s^* имеет следующий геометрический смысл. Пусть S представляет цилиндрическую поверхность, проходящую через ось скважины C (рис. 2). Образующие цилиндрической поверхности параллельны оси OZ. Поверхность S пересекает плоскость XOY по линии C^*. Если развернуть поверхность S на плоскость, то линия C превратится в плоскую кривую Γ (рис. 3), а кривая C^* — в прямую линию. При этом касательная в точке M сохранит угол θ с направлением вертикальной оси, а длина дуги OM останется неизменной.

Между координатами точки M (u, v) кривой Γ и ее дугой s имеют место соотношения

$$\frac{du}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{dv}{ds} = \cos\theta, \tag{10}$$

причем

$$u = v = 0 \qquad \text{при} \quad s = 0. \tag{11}$$

Сопоставление уравнений (5) и (7) с уравнениями системы (10) показывает, что

$$u = s^*, \quad v = z. \tag{12}$$

Первое из равенств (12) раскрывает геометрический смысл введенной выше переменной s^*. Оно показывает, что s^* является длиной дуги OM^* кривой C^*, превращающейся в отрезок OM^* оси OU при развертывании цилиндрической поверхности на плоскости.

Второе из соотношений (12) выражает равенство ординаты v кривой Γ и аппликаты z кривой C. Зависимость между координатами u, v точки кривой Γ, углом наклона θ и дугой s, определяемая уравнениями (10), такая же как и зависимость между координатами x, y точки кривой C^*, длиной дуги s^* и азимутом φ, выражаемая уравнениями (9). Последнее позволяет указать одинаковые приемы для приближенного определения координат плоской развертки скважины и координат ее проекции на горизонтальную плоскость.

Уравнения (10) позволяют представить координаты развертки оси скважины в форме определенных интегралов

$$u = \int_0^s \sin\theta\, ds, \quad v = \int_0^s \cos\theta\, ds. \tag{13}$$

Из уравнений (9) получаются формулы для вычисления координат проекции оси скважины на горизонтальную плоскость

$$x = \int_0^{s^*} \cos\varphi\, ds^*, \quad y = \int_0^{s^*} \sin\varphi\, ds^*. \tag{14}$$

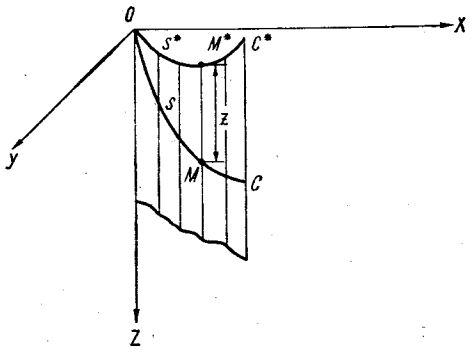


Рис. 2. Горизонтальная проекция оси скважины.

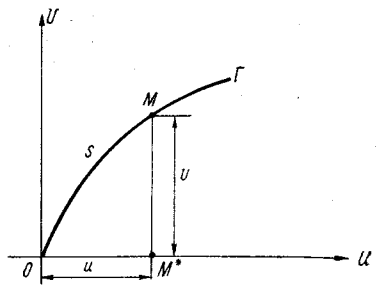


Рис. 3. Развертка оси скважины.

Имея последовательные определения наклона θ_k и расстояния s_k в ряде точек M_k по оси скважины ($k = 0, 1, 2 \ldots$), последовательно находим разности координат развертки по формулам

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \sin\theta\, ds, \quad \Delta v_k = v_{k+1} - v_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \cos\theta\, ds \tag{15}$$

и разности координат точек горизонтальной проекции по формулам

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \int_{s_k^*}^{s_{k+1}^*} \cos\varphi\, ds^*, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \int_{s_k^*}^{s_{k+1}^*} \sin\varphi\, ds^*. \tag{16}$$

Согласно (12), первое из равенств (15) дает длины дуг $M_k^* M_{k+1}^*$ горизонтальной проекции скважины

$$\Delta s_k^* = s_{k+1}^* - s_k^* = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \sin\theta\, ds. \tag{17}$$

Второе из равенств (15) доставляет формулу для вычисления разности глубин последовательных точек скважины

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \cos\theta\, ds. \tag{18}$$

Координаты последовательных точек скважины определяют суммированием вычисленных разностей, например,

$$z_m = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta z_k. \tag{19}$$

Использование указанных формул требует приближенного вычисления величины определенных интегралов, входящих в эти формулы. Это можно выполнить по одной из формул приближенных квадратур. Приводим формулы для вычисления разностей координат, соответствующие простейшим приемам выполнения приближенных квадратур: способами трапеций, средних прямоугольников и способом Симпсона.

Способ трапеций

$$\Delta z_k \approx \frac{1}{2}(\cos\theta_k + \cos\theta_{k+1})\,\Delta s_k \tag{20}$$

$$\Delta s_k^* \approx \frac{1}{2}(\sin\theta_k + \sin\theta_{k+1})\,\Delta s_k \tag{21}$$

$$\Delta x_k \approx \frac{1}{2}(\cos\varphi_k + \cos\varphi_{k+1})\,\Delta s_k^* \tag{22}$$

$$\Delta y_k \approx \frac{1}{2}(\sin\varphi_k + \sin\varphi_{k+1})\,\Delta s_k^* \tag{23}$$

Способ средних прямоугольников

$$\Delta z_k \approx \cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})\,\Delta s_k \tag{24}$$

$$\Delta s_k^* \approx \sin\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1})\,\Delta s_k \tag{25}$$

$$\Delta x_k \approx \cos\frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1})\,\Delta s_k^* \tag{26}$$

$$\Delta y_k \approx \sin\frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1})\,\Delta s_k^* \tag{27}$$

Способ Симпсона

$$\Delta z_k \approx \frac{1}{6}\left[\cos\theta_k + 4\cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}) + \cos\theta_{k+1}\right]\Delta s_k \tag{28}$$

$$\Delta s_k^* \approx \frac{1}{6}\left[\sin\theta_k + 4\sin\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}) + \sin\theta_{k+1}\right]\Delta s_k \tag{29}$$

$$\Delta x_k \approx \frac{1}{6}\left[\cos\varphi_k + 4\cos\frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1}) + \cos\varphi_{k+1}\right]\Delta s_k^* \tag{30}$$

$$\Delta y_k \approx \frac{1}{6}\left[\sin\varphi_k + 4\sin\frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1}) + \sin\varphi_{k+1}\right]\Delta s_k^* \tag{31}$$

Погрешность определения координат точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$ обусловлена двумя причинами: ошибками измерения длины s_k, углов θ_k, φ_k и погрешностью приближенных формул, используемых для вычисления координат. Ошибки измерения носят случайный характер и не зависят одна от другой. Погрешность определения координат x_k, y_k, z_k, вызванная ошибками измерения углов θ_k и φ_k, может быть выражена через последние.

Если некоторая величина U вычисляется по значениям величин u_1, u_2, . . ., u_k, доставляемых измерением, с помощью приближенной формулы

$$U \approx F(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{32}$$

то случайная ошибка ΔU, при этом допускаемая, обычно определяется равенством

$$\Delta U \approx \frac{\partial F}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\Delta u_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_k}\Delta u_n + \Delta^{(2)}U, \tag{33}$$

где $\Delta u_1, \ldots, \Delta u_n$ — ошибки измерения, $\Delta^{(2)}U$ — погрешность приближенной формулы (32).

Случайные ошибки измерения Δu_i не зависят одна от другой и от погрешности $\Delta^{(2)}U$, которая также является случайной. Верхняя граница

абсолютной величины возможной ошибки ΔU будет в дальнейшем обозначаться Δ_U. В силу (33) можно принять

$$\Delta_U = \Delta_U^{(1)} + \Delta_U^{(2)}, \tag{34}$$

где $\Delta_U^{(1)}$ — верхняя граница абсолютной величины возможной ошибки, определяемой равенством

$$\Delta^{(1)}U = \frac{\partial F}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\Delta u_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\Delta u_n; \tag{35}$$

$\Delta_U^{(2)}$ — верхняя граница абсолютной величины погрешности $\Delta^{(2)}U$. Верхняя граница $\Delta_U^{(1)}$ выражается равенством

$$\Delta_U^{(1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} F'_k \Delta_k^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

где для краткости положено

$$F'_k = \frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

Величина Δ_k обозначает верхнюю границу абсолютной величины возможной ошибки Δu_k.

С помощью равенства (36) легко установить верхнюю границу абсолютной ошибки определения координат точки $M_m(x_m, y_m, z_m)$, вызываемой ошибками измерения углов θ_k, φ_k ($k = 0, 1 \ldots$). Верхняя граница абсолютной величины ошибок измерения углов θ_k и φ_k обозначается соответственно Δ_θ и Δ_φ.

В качестве расчетных формул возьмем формулы средних прямоугольников, наиболее часто применяемые в практике расчетов. Величину z_m находим согласно равенству

$$z_m = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta z_k, \tag{37}$$

которое можно представить в виде

$$z_m = \sum_{k=0}^{m-1} l_k \cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}) + w_m^*, \tag{38}$$

где

$$w_m^* = \sum_{k=0}^{m-1} w_k, \quad l_k = \Delta s_k, \tag{39}$$

w_k — погрешность приближенного равенства (24).

Значение l_k доставляется измерением. Ошибка измерения l_k обычно не принимается во внимание. В дальнейшем будем, однако, считать, что верхняя граница абсолютной величины относительной погрешности l_k равна δ_l.

Согласно (34)

$$\Delta_z = \Delta_z^{(1)} + \Delta_z^{(2)}, \tag{40}$$

где $\Delta_z^{(2)}$ — верхняя граница абсолютной величины w_m^*.

Величина $\Delta_z^{(1)}$, согласно (36) и (38), дается равенством

$$\Delta_z^{(1)} = \left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{1}{4}\Delta_\theta^2\left[l_{k-1}\sin\frac{1}{2}(\theta_{k-1}+\theta_k) + l_k\sin\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1})\right]^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta_l^2 l_k^2 \cos^2\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1})\right\}\right)^{1/2}.$$

Обычно $l_0 = l_1 = \ldots = l_{n-1} = l$, что позволяет выразить $\Delta_z^{(1)}$ более простым равенством

$$\Delta_z^{(1)} = l\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\Delta_\theta^2 \cos^2\frac{1}{4}(\theta_{k+1}-\theta_k)\sin^2\frac{1}{4}(\theta_{k-1}+2\theta_k+\theta_{k+1})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\delta_l^2\cos^2\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1})\right\}\right)^{1/2}.$$

При небольших разностях $\theta_{k+1} - \theta_{k-1}$ погрешность $\Delta_z^{(1)}$ может вычисляться по приближенной формуле

$$\Delta_z^{(1)} \approx l\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\Delta_\theta^2\sin^2\frac{1}{4}(\theta_{k-1}+2\theta_k+\theta_{k+1})+\delta_l^2\cos^2\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1})\right\}\right)^{1/2}. \quad (41)$$

Для приближенного расчета вместо (41) можно пользоваться равенством

$$\Delta_z^{(1)} \approx l\sqrt{m}\,(\Delta_\theta^2\sin^2\bar{\theta}_m+\delta_l^2\cos^2\bar{\theta}_m)^{1/2}, \quad (42)$$

где $\bar{\theta}_m$ — среднее значение угла θ_k, определяемое на участке от точки M_0 до M_m.

Равенство (42) можно представить в виде

$$\Delta_z^{(1)} \approx \sqrt{Ll}\,(\Delta_\theta^2\sin^2\bar{\theta}_L+\delta_l^2\cos^2\bar{\theta}_L)^{1/2}, \quad (43)$$

удобном для прикидочных расчетов отклонения расчетных координат на заданной глубине $L = l_m$ по скважине в зависимости от ошибок измерения Δ_θ, δ_l, расстояния l между точками замеров и ожидаемого искривления $\bar{\theta}_L$ на рассматриваемом участке от устья скважины.

Завышая верхнюю границу возможного отклонения, можно пользоваться приближенным равенством

$$\Delta_z^{(1)} \approx \sqrt{Ll\left(\Delta_\theta^2+\delta_l^2\right)}, \quad (44)$$

уже не содержащим угла $\bar{\theta}_L$, который до измерений остается неизвестным. Требование к точности измерений, предъявляемые на основании (44), завышаются, а расстояние между точками замеров занижается.

Аналогично равенствам (41) — (44) устанавливаются равенства, служащие для оценки величин $\Delta_x^{(1)}$ и $\Delta_y^{(1)}$.

$$\Delta_x^{(1)} = \left(\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{1}{4}A_k^2\Delta_\theta^2+\frac{1}{4}B_k^2\Delta_\varphi^2+C_k^2\delta_l^2\right\}\right)^{1/2}, \quad (45)$$

где

$$A_k = l_{k-1}\cos\frac{1}{2}(\varphi_{k-1}+\varphi_k)\cos\frac{1}{2}(\theta_{k-1}+\theta_k)+$$
$$+l_k\cos\frac{1}{2}(\varphi_k+\varphi_{k+1})\cos\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1}), \quad (46)$$
$$B_k = l_{k-1}\sin\frac{1}{2}(\varphi_{k-1}+\varphi_k)\sin\frac{1}{2}(\theta_{k-1}+\theta_k)+$$
$$+l_k\sin\frac{1}{2}(\varphi_k+\varphi_{k+1})\sin\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1}), \quad (47)$$
$$C_k = l_k\cos\frac{1}{2}(\varphi_k+\varphi_{k+1})\sin\frac{1}{2}(\theta_k+\theta_{k+1}) \quad (48)$$

и

$$\Delta_y^{(1)} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{4} A_k'^2 \Delta_\theta^2 + \frac{1}{4} B_k'^2 \Delta_\varphi^2 + C_k'^2 \delta_l^2 \right\} \right)^{1/2}, \tag{49}$$

где

$$A_k' = l_{k-1} \sin \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \cos \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + l_k \sin \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \cos \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{50}$$

$$B_k' = l_{k-1} \cos \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \sin \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + l_k \cos \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{51}$$

$$C_k' = l_k \sin \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}). \tag{52}$$

При $l_0 = l_1 = \ldots = l_{n-1} = l$ равенства (45) и (49) представим в виде

$$\Delta_x^{(1)} = l \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{4} a_k^2 \Delta_\theta^2 + \frac{1}{4} b_k^2 \Delta_\varphi^2 + c_k^2 \delta_l^2 \right\} \right)^{1/2}, \tag{53}$$

где

$$a_k = \cos \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \cos \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + \cos \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \cos \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{54}$$

$$b_k = \sin \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \sin \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + \sin \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{55}$$

$$c_k = \cos \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}) \tag{56}$$

и

$$\Delta_y^{(1)} = l \left(\sum_{k-0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{4} a_k'^2 \Delta_\theta^2 + \frac{1}{4} b_k'^2 \Delta_\varphi^2 + c_k'^2 \delta_l^2 \right\} \right)^{1/2}, \tag{57}$$

где

$$a_k' = \sin \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \cos \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + \sin \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \cos \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{58}$$

$$b_k' = \cos \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \sin \frac{1}{2} (\theta_{k-1} + \theta_k) + \\ + \cos \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{59}$$

$$c_k' = \sin \frac{1}{2} (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \sin \frac{1}{2} (\theta_k + \theta_{k+1}). \tag{60}$$

Замена сумм квадратов коэффициентов a_k, b_k, c_k их верхними границами в равенстве (53) дает приближенное равенство

$$\Delta_z^{(1)} \approx l \sqrt{m} \left(\Delta_\theta^2 \cos^2 \bar{\theta}_m + \left(\Delta_\varphi^2 + \delta_l^2 \right) \sin^2 \bar{\theta}_m \right)^{1/2}, \tag{61}$$

где $\bar{\theta}_m$ — среднее значение угла наклона θ на участке от точки M_0 до точки M_m.

Равенство (61) удобнее представить в виде

$$\Delta_x^{(1)} \approx \sqrt{Ll}\,\left(\Delta_\theta^2 \cos^2 \bar{\theta}_L + \left(\Delta_\varphi^2 + \delta_l^2\right) \sin^2 \bar{\theta}_L\right)^{1/2}, \tag{62}$$

где $\bar{\theta}_L$ — средний угол наклона на участке скважины длиной L, считая от устья.

Аналогичными рассуждениями на базе (58), (59), (60) устанавливается приближенное равенство

$$\Delta_y^{(1)} \approx \sqrt{Ll}\,\left(\Delta_\theta^2 \cos^2 \bar{\theta}_L^* + \left(\Delta_\varphi^2 + \delta_l^2\right) \sin^2 \bar{\theta}_L^*\right)^{1/2}. \tag{63}$$

Завышение верхней границы приводит к равенству

$$\Delta_x^{(1)} \approx \Delta_y^{(1)} \approx \sqrt{Ll}\left(\Delta_\theta^2 + \Delta_\varphi^2 + \delta_l^2\right)^{1/2}, \tag{64}$$

не содержащему результатов измерения и пригодному для прикидочных расчетов.

Величина w_k остаточного члена в равенстве

$$\Delta z_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \cos\theta\, ds = l_k \cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}) + w_k, \tag{65}$$

где

$$\Delta s_k = s_{k+1} - s_k = l_k,$$

является случайной, зависящей от характера искривления оси скважины на участке от точки M_k до точки M_{k+1}. Это становится сразу очевидным, если в интеграле равенства (65) принять за независимую переменную угол θ и ввести в рассмотрение радиус кривизны оси скважины в точке M

$$R = \frac{ds}{d\theta}.$$

Равенство (65) принимает вид

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} R\cos\theta\, d\theta = l_k \cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}) + w_k. \tag{66}$$

Величина R при переходе от точки M_k к точке M_{k+1} определяется обстановкой буровых работ: характером проходимых пород, буровым инструментом, работающим персоналом и так далее. Она может рассматриваться как случайная величина, удовлетворяющая условию $R \geqslant R_0$, где R_0 — минимум радиуса кривизны, допустимый по соображениям прочности.

Рассмотрение опытного материала показывает [Журавский, 1961], что для обычно употребляемого бурового инструмента можно принять $R_0 \approx 1150$ *м*.

Однако эту величину не следует считать окончательной. Считая w_k величиной случайной, определяемой характером изменения кривизны на дуге M_kM_{k+1} оси скважины, естественно поставить вопрос о принимаемых ею значениях, о ее средней величине и среднем или максимальном уклонении случайного значения от среднего.

В решении поставленной задачи существенную помощь оказывает следующая механическая аналогия. Координаты X, Y центра тяжести C массы M, распространенной на дуге AB окружности радиуса единица (рис. 4), выражаются формулами

$$MX = \int_\alpha^\beta \mu\cos\theta\, d\theta, \quad MY = \int_\alpha^\beta \mu\sin\theta\, d\theta, \tag{67}$$

где μ — погонная плотность массы на дуге AB. При этом имеет место равенство

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} \mu \, d\theta. \tag{68}$$

Положение центра тяжести C зависит от распределения массы на дуге AB, т. е. от плотности μ. Однако каково бы ни было это распределение, точка C всегда находится внутри или на границе кругового сегмента, ограниченного дугой AB и стягивающей ее хордой AB.

Если масса M распределена на дуге AB равномерно, то точка C занимает положение C_0 (X_0, Y_0), где

$$X_0 = \lambda \cos\gamma, \quad Y_0 = \lambda \sin\gamma \tag{69}$$

и

$$\lambda = \frac{\sin\delta}{\delta}, \quad \gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \quad \delta = \frac{1}{2}(\beta-\alpha). \tag{70}$$

Если вся масса M сосредоточена в точке C_1 (X_1, Y_1) на середине дуги AB, то точка C совпадает с C_1 и

$$X_1 = \cos\gamma, \quad Y_1 = \sin\gamma. \tag{71}$$

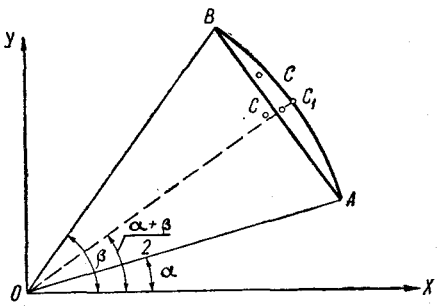


Рис. 4. Положение центра тяжести дуги

Величина

$$w = \int_{\alpha}^{\beta} \mu \cos\theta \, d\theta - M\cos\gamma = M(X - X_1), \tag{72}$$

завися от распределения плотности μ на дуге AB, является случайной. Она тесно связана со случайным положением центра тяжести C (X, Y) распределенных масс.

Если принять, что все положения центра тяжести C одинаково возможны, то среднее значение $\bar{w}$ выразится равенством

$$\bar{w} \approx -0{,}3\, M\delta^2 \cos\gamma \tag{73}$$

при малом δ.

Среднее значение $\bar{w}$ ошибки w приближенного равенства

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu \cos\theta \, d\theta \approx M\cos\gamma, \tag{74}$$

согласно приближенному равенству (73), имеет порядок малости δ^2, в то время как среднее отклонение σ_w возможной ошибки w от ее средней величины $\bar{w}$, согласно (72), определяется равенством

$$\sigma_w \approx \sqrt{0{,}2}\, M\delta \sin\gamma \approx 0{,}447\, M\delta \sin\gamma \tag{75}$$

и имеет порядок малости δ. Последнее показывает, что ошибка w равенства (74) в гораздо большей мере определяется случайными обстоятельствами, нежели систематической погрешностью, связанной с приближенной формулой (74).

Ошибка w'_β приближенного равенства

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu \sin\theta \, d\theta \approx M\sin\gamma \tag{76}$$

имеет среднюю величину

$$\bar{w}' \approx -0{,}3\, M\delta^2 \sin\gamma \tag{77}$$

и среднее отклонение

$$\sigma_{w'} \approx \sqrt{0{,}2} M \delta \cos\gamma. \tag{78}$$

Приближенное равенство

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} R\cos\theta\, d\theta \approx l_k \cos\frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}), \tag{79}$$

которое рассматривалось при решении задачи о положении оси изогнутой буровой скважины, того же типа, что и приближенное равенство (74). Если случайная ошибка w последнего имеет тот же закон распределения, что и случайная ошибка w_k рассматриваемого приближенного равенства, то ее средняя величина

$$\overline{w}_k \approx -0{,}3\, l_k (\Delta'\theta_k)^2 \cos\theta_k' \tag{80}$$

и среднее отклонение

$$\sigma_k \approx 0{,}447 l_k\ \Delta'\theta_k \sin\theta_k', \tag{81}$$

где

$$\Delta'\theta_k = \frac{1}{2}(\theta_{k+1} - \theta_k), \quad \theta_k' = \frac{1}{2}(\theta_k + \theta_{k+1}). \tag{82}$$

Вопрос о законе распределения случайной ошибки w_k приближенного равенства (79) требует специального исследования и должен базироваться на статистическом изучении материалов по изгибу скважин. Принимая равенства (90) и (91) для характеристики закона распределения, отметим, что величина σ_k при этом завышается и соответственно завышается оценка погрешности w_m^* формулы (37), принятой для расчета z_m.

Случайная погрешность w_m^* характеризуется, согласно (39), средней величиной

$$\overline{w_m^*} = \sum_{k=0}^{m-1} \overline{w}_k \approx -0{,}3 \sum_{k=0}^{m-1} l_k (\Delta'\theta_k)^2 \cos\theta_k', \tag{83}$$

если $\Delta'\theta_k$ величины небольшие, что обычно и имеет место. В случае $l_0 = l_1 = \cdots = l_{n-1} = l$ оценку $\overline{w_m^*}$ можно произвести по формуле

$$\overline{w}_m^* \approx -0{,}3\, l\, (\Delta'\theta)^2 \sum_{k=0}^{m-1} \cos\theta_k', \tag{84}$$

где

$$\Delta'\theta = \mathrm{Max}\,[(\Delta'\theta_1), \quad (\Delta'\theta_2), \ldots].$$

Для практических расчетов вместо (84) удобнее пользоваться равенством

$$w_m^* \approx -0{,}3\, L\, (\Delta'\theta)^2 \cos\overline{\theta_L'}, \tag{85}$$

где

$$L = ml \ \text{ и } \ \overline{\theta_L'} \approx \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \theta_k'.$$

Среднее квадратическое отклонение w_m^* характеризуется равенством

$$(\sigma_m^*)^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_k^2 \approx \sum_{k=0}^{m-1} 0{,}2\, l_k^2 \sin^2\theta_k' (\Delta'\theta_k)^2 \tag{86}$$

при небольших значениях $\Delta'\theta_k$. Последнее, при равных l_k, может быть заменено приближенным

$$(\sigma_m^*)^2 \approx 0{,}2\, Ll \sin^2\overline{\theta}_L' (\Delta'\theta)^2. \tag{87}$$

Величина наибольшего возможного отклонения $\Delta_z^{(2)}$ абсолютной величины ошибки w_m^* от нуля определяется равенством

$$\Delta_z^{(2)} = |\overline{w_m^*}| + 3\sigma_m^*,$$

которое, с учетом (85) и (87), при небольшой величине $\Delta'\theta$ представляется в виде

$$\Delta_z^{(2)} \approx \sqrt{Ll}\left\{1{,}34\ \overline{\sin\theta'}_L + 0{,}3\sqrt{\frac{L}{l}}\left(\overline{\cos\theta'}\right)_L \cdot \Delta'\theta\right\}\Delta'\theta. \qquad (88)$$

В равенстве (88) отчетливо видно, что при не слишком больших $\Delta'\theta$ и обычно встречающихся на практике L второе слагаемое значительно меньше первого. Так, например, принимая по опытным материалам $\Delta'\theta = 0{,}003$, $l = 20$ *м*, $L = 1000$ *м*, второе слагаемое имеет величину $\approx 0{,}007\ (\overline{\cos\theta'})_L$, что составляет меньше 1% от первого слагаемого.

При оценке погрешности $\Delta_z^{(2)}$ для не слишком глубоких скважин можно пользоваться формулой

$$\Delta_z^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\ \overline{\sin\theta'}_L\,\Delta'\theta, \qquad (89)$$

сохраняя формулу (88) лишь для глубокого бурения.

Оценки погрешностей $\Delta_z^{(1)}$ и $\Delta_z^{(2)}$, доставляемые равенствами (44) и (89), позволяют определить величину Δ_z. Согласно (40),

$$\Delta_z \approx \sqrt{Ll}\left(\sqrt{\Delta_\theta^2 + \delta_l^2} + 1{,}34\Delta'\theta\,\overline{\sin\theta'}_L\right). \qquad (90)$$

Допуская некоторое завышение оценки погрешности, можно предложить формулу, удобную для практического расчета,

$$\Delta_z \approx \sqrt{Ll}\,(\Delta_\theta + \delta_l + 1{,}34\Delta'\theta). \qquad (91)$$

Равенство (91) непосредственно следует из (90).

Формулы для оценки $\Delta_x^{(2)}$ и $\Delta_y^{(2)}$ устанавливаются так же, как и формула (89) для оценки $\Delta_z^{(2)}$. Не останавливаясь на их выводе, приведем лишь окончательные результаты

$$\Delta_x^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\left[(\Delta'\varphi)^2\,\overline{\sin^2\varphi'_L\sin^2\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2\,\overline{\cos^2\varphi'_L\cos^2\theta'_L}\right]^{1/2} +$$

$$+ 0{,}3\,L\left|\overline{\sin\theta'_L}\ \overline{\cos\varphi'_L}\right|\left[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2\right] \qquad (92)$$

и

$$\Delta_y^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\left[(\Delta'\varphi)^2\,\overline{\cos^2\varphi'_L\sin^2\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2\sin^2\varphi'_L\cos^2\theta'_L\right]^{1/2} +$$

$$+ 0{,}3\,L\left|\overline{\sin\theta'_L}\,\overline{\sin\varphi'_L}\right|[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2], \qquad (93)$$

где знаком $\overline{f(\varphi'_L,\ \theta'_L)}$ обозначена величина

$$\overline{f(\varphi'_L,\ \theta'_L)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\varphi'_k,\ \theta'_k), \qquad (94)$$

причем $L = ml$.

Величина

$$\Delta'\varphi = \mathrm{Max}\,(|\Delta'\varphi_0|,\ |\Delta'\varphi_1|, \ldots)$$

и

$$\Delta'\theta = \mathrm{Max}\,(|\,\Delta'\theta_0\,|,\ |\,\Delta'\theta_1\,|,\ldots).$$

Если допустить некоторое огрубление оценки погрешности, то указанные равенства можно заменить более простыми

$$\Delta_x^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\left[(\Delta'\varphi)^2\overline{\sin^2\varphi'_L}\;\overline{\sin^2\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2\overline{\cos^2\varphi'_L}\;\overline{\cos^2\theta'_L}\right]^{1/2} + \\ + 0{,}3\,L\,|\overline{\sin\theta'_L}\;\overline{\cos\varphi'_L}\,|\,[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2] \qquad (95)$$

и

$$\Delta_y^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\left[(\Delta'\varphi)^2\overline{\cos^2\varphi'_L}\;\overline{\sin^2\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2\overline{\sin^2\varphi'_L}\;\overline{\cos^2\theta'_L}\right]^{1/2} + \\ + 0{,}3\,L\,|\overline{\sin\theta'_L}\;\overline{\sin\varphi'_L}\,|\,[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2]. \qquad (96)$$

Когда величина $\sqrt{\frac{L}{l}}\,[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2]^{1/2}$ мала по сравнению с 1 в пределах точности расчета, вторые слагаемые в равенствах (95) и (96) могут быть опущены.

Равенства (95) и (96) значительно упрощаются, если допустить завышение оценок. Их заменяют равенства

$$\Delta_x^{(2)} \approx \Delta_y^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{Ll}\,\left[(\Delta'\varphi)^2\sin^2\overline{\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2\right]^{1/2} + \\ + 0{,}3\,L\sin\overline{\theta'_L}\,\left[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2\right]. \qquad (97)$$

Пользуясь равенствами (64) и (97), уже легко оценить погрешность Δ_x и Δ_y

$$\Delta_x \approx \Delta_y \approx \sqrt{Ll}\left[\sqrt{\Delta_\theta^2 + \Delta_\varphi^2 + \delta_l^2} + 1{,}34\sqrt{(\Delta'\varphi)^2\sin^2\overline{\theta'_L} + (\Delta'\theta)^2}\,\right] + \\ + 0{,}3\,L\sin\overline{\theta'_L}\left[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2\right]. \qquad (98)$$

Для прикидочных оценок можно пользоваться равенством (99)

$$\Delta_x \approx \Delta_y \approx \sqrt{Ll}\,\left[\Delta_\theta + \Delta_\varphi + \delta_l + 1{,}34\,(\Delta'\varphi\sin\overline{\theta'_L} + \Delta'\theta)\right] + \\ + 0{,}3\,L\sin\overline{\theta'_L}\left[(\Delta'\varphi)^2 + (\Delta'\theta)^2\right]. \qquad (99)$$

Второе слагаемое в равенствах (97), (98), (99) значительно меньше первого и при неглубоком бурении обычно может быть опущено.

Для иллюстрации изложенного рассмотрим пример. Требуется указать наибольшее возможное отклонение расчетных координат оси буровой скважины от их истинных значений на глубине по скважине $L = 900$ *м* при расстоянии $l = 20$ *м* между точками последовательных замеров. Величины $\Delta'\theta = 0{,}003$, $\Delta'\varphi = 0{,}1$. Среднее значение $\overline{\theta'_L} = 31'$ или $\overline{\theta'_L} = 0{,}009$.

Эти данные взяты для скважины, пробуренной в одном из северных районов. Измерения производили инклинометром ИШ-2, точность работы которого характеризуется $\Delta_\theta = 0{,}002$, $\Delta_\varphi = 0{,}05$.

По формуле (99), (91)

$$\Delta_x = \Delta_y \approx \sqrt{900\cdot 20}\,[0{,}002 + 0{,}05 + 1{,}34\,(0{,}009\cdot 0{,}1 + 0{,}003)] + \\ + 0{,}3\cdot 900\cdot 0{,}009\cdot 0{,}1^2 + 0{,}003^2] \approx 0{,}8\ м$$

и

$$\Delta_z \approx \sqrt{900 \cdot 20}\,(0{,}002 + 1{,}34 \cdot 0{,}003) \approx 0{,}8 \text{ м}.$$

В расчетах относительная погрешность δ_l считается пренебрежимо малой.

Оценивая погрешности по (98), (90), имеем

$$\Delta_x \approx \Delta_y \approx \sqrt{900 \cdot 20}\left[\sqrt{0{,}002^2 + 0{,}05^2} + 1{,}34\sqrt{(0{,}009 \cdot 0{,}1)^2 + 0{,}003^2}\right] + \\ + 0{,}3 \cdot 900 \cdot 0{,}009\,[0{,}1^2 + 0{,}003^2] \approx 0{,}8 \text{ м}$$

и

$$\Delta_z \approx \sqrt{900 \cdot 20}\left(\sqrt{0{,}002^2 + 0^2} + 1{,}34 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}009\right) \approx 0{,}3 \text{ м}.$$

Расчет по формулам (90), (98) дает приблизительно тот же результат. Если рассчитать $\Delta_x^{(1)}$, $\Delta_y^{(1)}$ по формулам (61), (62), принимая $\bar{\theta}_L = \bar{\theta}'_L$, то

$$\Delta_x^{(1)} \approx \Delta_y^{(1)} \approx \sqrt{900 \cdot 200}\left[(0{,}002 \cdot 1)^2 + 0{,}05^2 \cdot 0{,}009^2\right]^{1/2} \approx 0{,}3 \text{ м}.$$

Расчет $\Delta_x^{(2)}$ и $\Delta_y^{(2)}$ по формулам (92), (93) при

$$\overline{\cos^2 \varphi'_L \sin^2 \theta'_L} \approx 1{,}88 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\sin^2 \varphi'_L \sin^2 \theta'_L} \approx 10{,}0 \cdot 10^{-5},$$

$$\overline{\cos^2 \varphi'_L \cos^2 \theta'_L} \approx 0{,}187, \quad \overline{\sin^2 \varphi'_L \cos^2 \theta'_L} \approx 0{,}815,$$

$$\overline{\sin \varphi'_L} \approx -0{,}723, \quad \overline{\cos \varphi'_L} \approx -0{,}027, \quad \overline{\sin \theta'_L} \approx 0{,}009,$$

определенных по данным опытных замеров согласно (94), дает

$$\Delta_x^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{900 \cdot 20}\left[0{,}1^2 \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-5} + 0{,}003^2 \cdot 0{,}187\right]^{1/2} + \\ + 0{,}3 \cdot 0{,}009\,|-0{,}027\,| \cdot 900\,(0{,}1^2 + 0{,}003^2) \approx 0{,}30 + 0{,}00 \approx 0{,}3 \text{ м};$$

$$\Delta_y^{(2)} \approx 1{,}34\sqrt{900 \cdot 20}\left[0{,}1^2 \cdot 1{,}88 \cdot 10^{-5} + 0{,}003^2 \cdot 0{,}815\right]^{1/2} + \\ + 0{,}3 \cdot 0{,}009\,|-0{,}723\,| \cdot 900\,(0{,}1^2 + 0{,}003^2) \approx 0{,}49 + 0{,}02 \approx 0{,}5 \text{ м}.$$

Отсюда, согласно (34),

$$\Delta_x \approx 0{,}3 + 0{,}3 \approx 0{,}6 \text{ м}; \quad \Delta_y \approx 0{,}3 + 0{,}5 \approx 0{,}8 \text{ м}.$$

Расчет $\Delta_z^{(1)}$ по формуле (43) и $\Delta_z^{(2)}$ по формуле (88) дает

$$\Delta_z^{(1)} \approx \sqrt{900 \cdot 20}\left(0{,}002^2 \cdot 0{,}009^2 + 0^2\right)^{1/2} \approx 0{,}002 \text{ м};$$

$$\Delta_z^{(2)} \approx \sqrt{900 \cdot 20}\left[1{,}34 \cdot 0{,}009 + 0{,}3 \cdot 1 \cdot 0{,}003\sqrt{\frac{900}{20}}\right]0{,}003 \approx 0{,}007 \text{ м},$$

откуда, согласно (40), $\Delta_z \approx 0{,}002 + 0{,}007 \approx 0{,}01$ м.

Внимательное рассмотрение результатов расчета показывает, что упрощенные формулы, облегчая работу, завышают величину возможной погрешности определения координат. Величины возможных погрешностей $\Delta_x^{(1)}$ и $\Delta_y^{(1)}$, которые обусловлены ошибками измерения, имеют порядок величин погрешностей $\Delta_x^{(2)}$, $\Delta_y^{(2)}$, связанных с приближенными формулами расчета и обусловленных густотой сети точек измерения.

Наибольшее влияние на величину возможной погрешности оказывает измерение азимута. Как следует из расчета, погрешность Δ_z глубины точки забоя больше зависит от точности измерения, чем от густоты сети точек измерения. Погрешность определения глубины во много меньше погрешности бокового смещения.

Выводы

1. Погрешность определения положения точки забоя скважины возрастает с глубиной L по скважине примерно как $\sqrt{L}$ для несверхглубоких скважин.

2. Величина погрешности уменьшается с уменьшением расстояния l между последовательными точками замеров как $\sqrt{l}$.

3. Основное влияние на точность определения координат буровой скважины оказывает измерение азимута.

4. Повышение точности определения положения изогнутой оси скважины достигается за счет уменьшения расстояния l между точками замеров и уменьшения погрешностей измерения Δ_φ азимута и Δ_θ наклона.

5. Приближенные формулы оценки погрешности могут служить для определения густоты точек измерения и точности проводимых измерений, обеспечивающих требуемую точность пространственного положения оси скважины на заданном ее протяжении.