Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. L, вып. 2, 1966 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ И БУРЕНИЯ — ЗАДАЧА ТЕОРИИ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГР

И. Г. Клушин

В планировании обороны, производства и научных исследований в последние годы стала широко применяться новая научная дисциплина — теория игр [Чернов, Мозес, 1962; Саати, 1963; Дрешер, 1964]. Основная ее особенность в том, что она дает возможность наилучшим образом определить необходимые действия — выбрать наиболее удачную линию поведения (стратегию). Решение находится при условии, что окончательный итог не определяется полностью ни одной из сторон, участвующих в конфликтной ситуации, а сами действия предпринимаются на основе неполной информации.

Рассмотрим конфликт Разведчика и Природы. Разведчик стремится спланировать свои действия таким образом, чтобы с наименьшими затратами овладеть богатствами природы. Природа сопротивляется действиям Разведчика, скрывая свои богатства и заставляя его тратить силы и средства.

Положим, Разведчик выбирает стратегию x, тогда как состояние Природы, которое условно также будем называть стратегией (хотя это и пассивная стратегия), описывает величина y.

Платеж Природы Разведчику составляет $M(x, y)$. Этот платеж ограничен по величине и может быть как положительным, в случае, если Разведчик выигрывает у Природы, так и отрицательным.

Будем считать, что стратегии каждого из участников конфликта описываются при помощи некоторых функций распределения $F(x)$ и $G(y)$. Функции эти таковы, что

$$\int_0^X dF(x) = \int_0^Y dG(y) = 1, \tag{1}$$

где X, Y — максимальные значения x, y.

Ожидаемая величина платежа Природы Разведчику составляет

$$M(F, G) = \int_0^X \int_0^Y M(x, y)\, dF(x)\, dG(y). \tag{2}$$

Выражение (2) позволяет отнести рассматриваемую задачу к классу бесконечных игр [Дрешер, 1964], причем с небольшим упрощением игра сводится к игре на единичном квадрате [Льюис, Райфа, 1961].

Положим, функция распределения $F(x)$, описывающая стратегии Разведчика, имеет вид

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_{x_i}(x), \tag{3}$$

где a_i — некоторые константы.

$$\theta_{x_i}(x)\begin{cases}=0 \text{ при } x<x_i\\ =1 \text{ при } x\geqslant x_i\end{cases} \tag{4}$$

Если $M(x, y)$ — непрерывная функция x и y, то, учитывая соотношения

$$d\theta_{x_i}(x)=\delta(x-x_i)\,dx,$$

$$\int_0^X M(x, y)\,d\theta_{x_i}(x)=\int_0^X M(x, y)\,\delta(x-x_i)\,dx=M(x_i, y), \tag{5}$$

получаем

$$\int_0^X M(x, y)\sum_{i=1}^{n} a_i\,d\theta_{x_i}(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i M(x_i, y). \tag{6}$$

Таким образом,

$$M(F, G)=\int_0^Y \sum_{i=1}^{n} a_i M(x_i, y)\,dG(y). \tag{7}$$

Для достижения наилучших результатов Разведчик должен максимизировать ожидаемый платеж Природы, что можно осуществить путем соответствующего выбора функции $F(x)$, т. е. такой стратегии, которая наилучшим образом отвечает предварительным и неполным сведениям о состоянии Природы.

Рассмотрим задачу определения соотношения объемов сейсморазведочных и буровых работ, необходимых для изучения территории, перспективной на нефть и газ.

Ежегодно в нефтегазоносных провинциях бурится несколько миллионов погонных метров глубоких скважин. Стоимость 1 *пог. м* варьирует в зависимости от условий от 100 до 400 руб [Григорьян, 1962].

Наряду с бурением в большом объеме производятся геофизические работы, главным образом сейсморазведка в различных модификациях. Суммарная протяженность сейсмических профилей, обрабатываемых за год, составляет многие десятки тысяч — первые сотни тысяч километров. Стоимость 1 *км* меняется от 200 до 1000 руб.

Как известно, лишь бурение является тем средством, которое позволяет овладеть запасами нефти и газа. Вместе с тем для наилучшей ориентировки бурения полезно предварительно поставить сейсморазведочные работы. Сейсморазведка существенно дешевле бурения, однако сейсмический метод не во всех геологических условиях достаточно эффективен. Очевидно, наилучшее сочетание объемов сейсморазведки и бурения будет зависеть от стоимости единицы бурения и сейсморазведки, эффективности каждого метода исследования, среднего уровня ожидаемых результатов и возможной неопределенности ожидаемых результатов.

Предлагаемое ниже решение соответствует упрощенной постановке задачи: оценивается общий объем технических средств, необходимых для изучения территории в два этапа, первый из которых включает сейсморазведочные работы, а второй — бурение.

В более общем случае процесс поисков и разведки разбивается на ряд этапов. Учитывая это обстоятельство и влияние фактора времени, для решения задачи в такой постановке следует привлечь методы динамического программирования.

Введем следующие обозначения: B — ценность* одной глубокой скважины; S — ценность одного сейсмического профиля; q — ценность

* Понятие *ценность* не совпадает с понятием *стоимость*, так как учитывает местные особенности, например, обеспеченность определенного вида оборудованием.

нефтегазоносной площади; $G(q)$ — априорная вероятность того, что ценность нефтегазоносной площади превышает q.

Распределение $G(q)$ известно с той или иной неопределенностью до постановки сейсморазведки и бурения на основании всех предшествующих исследований: b — число глубоких скважин; s — число сейсмических профилей; p_1 — вероятность того, что глубокая скважина, заложенная без учета данных сейсморазведки, будет удачной; p_{1s} — то же, после проведения сейсморазведочных работ; p_2 — вероятность того, что сейсмический профиль, проведенный до постановки бурения, даст необходимый для последующего бурения материал.

Ценность площади, установленная бурением, очень быстро приближается к истинной ценности по мере увеличения числа удачных скважин. Приемлемой аппроксимацией этой зависимости является функция

$$q\left[1-e^{-\alpha b}\right], \quad (8)$$

где α — некоторый коэффициент.

Величина α определяется тем числом удачно размещенных скважин, которое, по-видимому, необходимо для определения ценности площади. Так, если $b = 3 \div 4$, то при систематической погрешности оценки q порядка $1 \div 2\%$, $\alpha = 1{,}3$. Аналогично, при $b = 1 \div 2$, $\alpha = 3{,}8$.

Отношение вероятностей p_{1s}: p_1 будем считать зависящим только от геологических условий. Это отношение определяет значимость сейсморазведки для последующего бурения, ее внешний эффект. Внутренние трудности сейсморазведки определяет величина p_2.

Стратегия Разведчика x состоит в проведении сейсмических работ на s профилях и в заложении по геофизическим данным b глубоких скважин, либо в отказе от бурения. Состояние Природы y есть ценность нефтегазоносной площади. Платеж Природы Разведчику определим для двух крайних случаев: 1) сейсморазведка полностью решила свою задачу и на основании структурных и других признаков уточнила ценность площади; 2) сейсморазведка ничего не определила.

В первом случае

$$M(x, y) = M(b, s; q) = q\left[1-e^{-\alpha p_{1s} b}\right] - Bb - Ss. \quad (9)$$

В правой части выражения (9) последовательно перечислены ценность, полученная у Природы в результате бурения скважин, ориентированных сейсморазведкой, затраты на бурение и затраты на сейсморазведку.

Во втором случае

$$M(x, y) = M(b, s; q) = \int_0^Q \left\{q\left[1-e^{-\alpha p_1 b}\right] - Bb - Ss\right\} dG(q), \quad (10)$$

где Q — максимально возможное значение q.

Сейсморазведка никак не повлияла на вероятность удачного расположения скважин, по сейсмическим данным не получено никаких сведений о ценности площади.

Принимая во внимание принятые обозначения, находим, что $(1 - p_2)^s$ есть вероятность того, что результаты всех сейсмических профилей будут неудачными. Соответственно, $1 - (1 - p_2)^s$ есть вероятность того, что результаты сейсморазведки будут удачными и дадут необходимые для бурения материалы, уточняющие ценность площади.

Обращаясь к равенству (7), находим

$$M(F, G) = M(b, s; q) = \int_0^Q \left\{(1-p_2)^s \int_0^Q \left[q\left(1-e^{-\alpha p_1 b}\right) - Bb - Ss\right] dG(q) + \right.$$
$$\left. + \left[1-(1-p_2)^s\right] \cdot \left[q\left(1-e^{-\alpha p_{1s} b}\right) - Bb - Ss\right]\right\} dG(q). \quad (11)$$

Учтем, что

$$\left[(1-p_2)^s+1-(1-p_2)^s\right]Ss=Ss,$$

и максимизируем ожидаемый платеж Природы по числу скважин b.

$$\max_b M(b, s; q)=M(s; q)=\int_0^Q\left\{(1-p_2)^s\max_b\int_0^Q\left[q\left(1-e^{-\alpha p_1 b}\right)-Bb\right]dG(q)+\right.$$

$$\left.+\left[1-(1-p_2)^s\right]\max_b\left[q\left(1-e^{-\alpha p_{1s}b}\right)-Bb\right]-Ss\right\}dG(q).$$

Для определения

$$\max_b\left[q\left(1-e^{-\alpha p_{1s}b}\right)-Bb\right]$$

продифференцируем выражение в квадратной скобке по b и приравняем производную нулю. Несложно убедиться, что экстремальное значение соответствует именно максимуму, а не минимуму функции.

$$\left[q\left(1-e^{-\alpha p_{1s}b}\right)-Bb\right]'_b=q\alpha p_{1s}e^{-\alpha p_{1s}b}-B=0;$$

$$e^{-\alpha p_{1s}b}=\frac{B}{q\alpha p_{1s}};$$

$$b=\frac{\ln\left(\frac{q\alpha p_{1s}}{B}\right)}{\alpha p_{s1}}. \tag{12}$$

Решение имеет смысл при $q\alpha p_{1s}>B$.

Найдем теперь

$$\max_b\int_0^Q\left[q\left(1-e^{-\alpha p_1 b}\right)-Bb\right]dG(q)=\max_b\left\{\left(1-e^{-\alpha p_1 b}\right)\int_0^Q q\,dG(q)-Bb\right\}.$$

Обозначим

$$\int_0^Q q\,dG(q)=\tilde{q}, \tag{13}$$

где $\tilde{q}$ — наиболее вероятная ценность площади по априорным представлениям.

Аналогично (12) вычисляем

$$b=\frac{\ln\left(\tilde{q}\,\frac{\alpha p_1}{B}\right)}{\alpha p_1}. \tag{14}$$

Итак,

$$\max_b M(b, s; q)=M(s; q)=\int_0^Q\left\{(1-p_2)^s\left[\tilde{q}\left(1-\frac{B}{\tilde{q}\alpha p_1}\right)-B\,\frac{\ln\left(\frac{\tilde{q}\alpha p_1}{B}\right)}{\alpha p_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[1-(1-p_2)^s\right]\cdot\left[q\left(1-\frac{B}{q\alpha p_{1s}}\right)-B\,\frac{\ln\left(\frac{q\alpha p_{1s}}{B}\right)}{\alpha p_{1s}}\right]-Ss\right\}dG(q). \tag{15}$$

Введем дополнительные обозначения:

$$A = \frac{B}{\alpha p_1}; \quad k = \frac{p_{1s}}{p_1}; \quad \gamma = \int_0^Q \ln q \, dG(q);$$

$$N = \frac{A}{k} - A - A \ln \tilde{q} + A \ln A + \frac{A}{k}\gamma - \frac{A}{k} \ln \frac{A}{k}. \tag{16}$$

Возвращаясь к (15), получаем

$$M(s; q) = \int_0^Q \left\{(1-p_2)^s \left[\tilde{q} - A - A \ln \frac{\tilde{q}}{A}\right] + \left[1-(1-p_2)^s\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[q - \frac{A}{k} - \frac{A}{k} \ln \left(\frac{qk}{A}\right)\right] - Ss\right\} dG(q) = (1-p_2)^s \left\{\tilde{q} - A - A \ln \frac{\tilde{q}}{A} - \tilde{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{k} + \frac{A}{k}\gamma - \frac{A}{k} \ln \frac{A}{k}\right\} + \tilde{q} - \frac{A}{k} - \frac{A}{k}\gamma + \frac{A}{k} \ln \frac{A}{k} - Ss =$$

$$= (1-p_2)^s N - Ss + \tilde{q} - \frac{A}{k}\left(1 + \gamma - \ln \frac{A}{k}\right). \tag{17}$$

Максимизируем платеж Природы по числу сейсмических профилей s. С этой целью дифференцируем (17) по s и приравниваем производную к нулю.

$$M'_s(s; q) = (1-p_2)^s \ln(1-p_2) N - S = 0:$$

$$s = \frac{\ln\left(\frac{N \ln(1-p_2)}{S}\right)}{-\ln(1-p_2)}. \tag{18}$$

Решение имеет смысл при

$$N \ln(1-p_2) > S, \tag{19}$$

т. е. ожидаемый эффект должен быть больше стоимости одного сейсмического профиля.

Итак, максимальный платеж Природы ожидается в том случае, если на основе априорных представлений будет проведена сейсморазведка на s профилях и при достижении положительных результатов и уточнении ценности площади заложено b скважин.

$$b = \frac{\ln\left(\frac{qk}{A}\right)}{\frac{Bk}{A}}. \tag{20}$$

Для иллюстрации формул (12), (18) рассмотрим два типичных варианта условий: а) перспективы площади в среднем значительны, но очень неопределенны; б) перспективы площади в среднем значительны и достаточно определенны.

Приводим основные численные данные, принятые при расчетах. Для стоимости и эффективности сейсмических исследований принято несколько значений; в качестве основной единицы взята ценность одной глубокой скважины:

$B = 1$ $\quad \frac{p_{1s}}{p_1} = 1{,}5;\ 3;\ 5;\ 10;\ 20$

$\alpha = 1{,}5$ $\quad S = 0{,}02;\ 0{,}08$

$p_1 = 0{,}05$ $\quad A = \frac{B}{\alpha p_1} = 13{,}3$

$p_2 = 0{,}10$

Таблица 1

Априорные данные о ценности площади

Вариант *а*		Вариант *б*		Характеристика ценности
Вероятность	Ценность	Вероятность	Ценность	
0,90	0,01			Теплая минерализованная вода
0,045	1	0,60	1	Незначительное количество нефти
0,035	100	0,30	100	Значительные запасы нефти и газа
0,015	1 000	0,10	380	Большие запасы нефти и газа
0,005	10 000			Громадные запасы нефти и газа
$\bar{q} = 68{,}6$		$\bar{q} = 68{,}6$		Средние перспективы площадей равны
$\gamma = -3{,}84$		$\gamma = 1{,}97$		Неопределенность перспектив существенно различна

Приводим результаты вычислений объемов сейсмических работ (число профилей s):

	Вариант *а*					Вариант *б*				
$K = \frac{p_{1s}}{p_1}$	1,5	3	5	10	20	1,5	3	5	10	20
При $S = 0{,}02$ . .	56	53	51	49	48	46	46	47	47	48
При $S = 0{,}08$ . .	42	38	37	35	34	32	32	33	33	34

Таблица 2

Оптимальное число глубоких скважин, подлежащих заложению после уточнения сейсморазведкой ценности площади

$k = p_{1s} : p_1$	p_{1s}	Ценность площади			
		4	10	68,6	1000
1,5	0,075	0	1	18	42
3	0,15	0	4	12	25
5	0,25	1	3	9	16
10	0,5	1	3	5	9
20	1,0	1	2	3	5

Из анализа табл. 1, 2, описывающих искусственные, но достаточно типичные ситуации, вытекают следующие выводы:

1. При неопределенных перспективах объем сейсморазведочных работ возрастает, при прочих равных условиях, по мере снижения геологической эффективности исследований. При определенных перспективах наблюдается тенденция к увеличению высокоэффективной сейсморазведки.

2. Стоимость и эффективность сейсморазведки существенно сказываются на оптимальных объемах работ, однако наиболее ярко при

определении объемов проявляется тенденция к многократному обеспечению полной вероятности решения задачи.

3. По мере ухудшения точности бурения оптимальное число скважин первоначально растет, а затем резко падает.

ЛИТЕРАТУРА

Григорьян И. А. Экономическая эффективность геологоразведочных работ на нефть и газ в Туркмении. Геология нефти и газа, № 12, 1962.

Дрешер М. Стратегические игры. Изд-во «Советское радио», 1964.

Льюис Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. ИЛ, 1961.

Саати Т. Л. Математические методы исследования операций. Воениздат, 1963.

Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений. Изд-во «Советское радио», 1962.