

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ГЕОФИЗИКЕ

С. В. Шалаев

В данной работе приводится обоснование метода аппроксимации аналитических выражений геофизических полей рациональными дробями и некоторыми другими выражениями. Метод основан на использовании математического программирования, главным образом линейного. В работе обобщается опыт интерпретации этим способом магнитных и гравитационных аномалий на вычислительной машине «Урал-2», которая может работать в режиме с плавающей запятой.

Постановка задачи. В математике наиболее полно разработаны способы аппроксимации полиномами. Аномалии вертикальной Z или горизонтальной H составляющих напряженности магнитного поля для реальных геологических объектов полиномами не выражаются. Только у некоторых простых тел специально подобранные функции

$$E = \frac{H}{H^2 + Z^2}; \quad F = \frac{Z}{H^2 + Z^2} \quad (1)$$

могут быть представлены полиномами [Шалаев, 1962]. В общем случае коэффициенты полинома, аппроксимирующего кривые H или Z , трудно связать с элементами залегания искомого геологического объекта. Для этой цели более подходят рациональные дроби [Шалаев, 1961].

Рассмотрим систему маломощных пластов, бесконечно вытянутых по падению и простираению. При однородно намагниченных пластах вертикальной составляющей Z будет соответствовать аналитическое выражение [Логачев, 1962].

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=1}^r 2I_k \varepsilon_k \frac{-(x-x_k) \sin \beta_k + h_k \cos \beta_k}{(x-x_k)^2 + h_k^2} + A = \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{P_k x + Q_k}{(x-x_k)^2 + h_k^2} + A, \end{aligned} \quad (2)$$

где x_k, h_k — прямоугольные координаты верхней кромки k -ого маломощного пласта; ось x расположена горизонтально, ось h — вертикально вниз; I_k — абсолютная величина намагниченности пласта; ε_k — истинная мощность пласта; r — число пластов; $\beta_k = \varphi_k - \gamma_k - \varphi_k$ — угол, отсчитанный по часовой стрелке от положительного направления оси x до линии падения пласта; γ_k — угол, отсчитанный по часовой стрелке от оси x до направления вектора $\vec{I}_k$; A — постоянный фон; P_k, Q_k — некоторые постоянные.

$$P_k = -2I_k \varepsilon_k \sin \beta_k; \quad (3)$$

$$Q_k = 2I_k \varepsilon_k (x_k \sin \beta_k + h_k \cos \beta_k). \quad (4)$$

С достаточной для практических целей точностью пласт считается маломощным при

$$\frac{\varepsilon_k}{h_k} \leq 0,5 \div 1. \quad (5)$$

Формула (2) показывает, что в магниторазведке задача определения элементов залегания системы маломощных пластов может быть поставлена следующим образом. Необходимо определить параметры x_k , h_k , P_k , Q_k и r рациональной дроби (2) по значениям $Z_s = Z(x_s)$, заданным в ограниченном числе точек прямолинейного профиля с абсциссами x_s . Затем уже нетрудно найти угол β_k и произведение намагниченности I_k на мощность пласта ε_k

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_k &= -\frac{M_k}{N_k} \\ I_k \varepsilon_k &= \frac{1}{2h_k} \sqrt{M_k^2 + N_k^2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где $M_k = h_k P_k$; $N_k = x_k P_k + Q_k$.

Согласно выражению (6), сначала находим угол

$$\beta_{k0} = \arctg \left| \frac{M_k}{N_k} \right|,$$

удовлетворяющий неравенствам $0 \leq \beta_{k0} \leq \frac{\pi}{2}$, а затем вычисляем угол β_k с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \beta_k &= \beta_{k0} \text{ при } M_k \leq 0; \quad N_k \geq 0 \\ \beta_k &= \pi - \beta_{k0} \text{ при } M_k \leq 0; \quad N_k \leq 0 \\ \beta_k &= \pi + \beta_{k0} \text{ при } M_k \geq 0; \quad N_k \leq 0 \\ \beta_k &= 2\pi - \beta_{k0} \text{ при } M_k \geq 0; \quad N_k \geq 0, \end{aligned}$$

имеющих смысл, если M_k и N_k одновременно не равны нулю.

Непосредственное определение параметров x_k , h_k , P_k и Q_k , входящих в формулу (2), по ординатам кривой Z_s требует применения нелинейных методов. Так, например, при $r = 1$ и $A = 0$ можно было бы искать методом наискорейшего спуска [Каган, Тер-Микаелян, 1964] численную величину параметров x_1 , h_1 , P_1 , Q_1 из условия минимума функции

$$\Psi(x_1, h_1 P_1, Q_1) = \sum_{s=1}^n \left[Z_s - \frac{P_1 x_s + Q_1}{(x_s - x_1)^2 + h_1^2} \right]^2, \quad (7)$$

где n — число точек профиля, в которых измерялись $Z_s = Z(x_s)$.

Успешное применение метода наискорейшего спуска при решении нелинейных задач требует выполнения ряда дополнительных условий, о части из которых нельзя заранее сказать, выполняются они или нет [Зойтендейк, 1963; Каган, Тер-Микаелян, 1964]. В связи с этим поставаемся полностью или частично свести поставленную задачу определения элементов залегания системы пластов к линейной.

Для этого приведем дробь (2) к общему знаменателю, после чего получим

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^r \frac{P_k x + Q_k}{(x - x_k)^2 + h_k^2} + A = \frac{c_1 x^{2r} + \dots + c_{2r+1}}{c_{2r+2} x^{2r} + \dots + c_{4r+2}}, \quad (8)$$

где c_k — коэффициенты, получающиеся после приведения дроби к общему знаменателю.

Исходные данные бывают искажены ошибками измерений и помехами, вызываемыми геологическими причинами. Поэтому наблюдаемые $Z_s =$

$= Z(x_s)$ и подбираемые значения $\Phi_s = \Phi(x_s)$ свяжем соотношениями:

$$|Z_s - \Phi_s| < v_s; \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где v_s — некоторые постоянные, которые надо задать, исходя из точности произведенных измерений и уровня помех. Каждое неравенство (9) состоит, по существу, из двух неравенств

$$-v_s < Z_s - \Phi_s < v_s$$

или

$$\left. \begin{aligned} Z_s - v_s - \Phi_s &< 0 \\ -Z_s - v_s + \Phi_s &< 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

В дроби (8) один коэффициент c_k можно выбрать произвольно, поэтому допустим, что

$$c_{2r+2} > 0. \quad (11)$$

Тогда знаменатель дроби (8)

$$c_{2r+2}x^{2r} + \dots + c_{4r+2} = c_{2r+2}[(x-x_1)^2 + h_1^2] \dots [(x-x_r)^2 + h_r^2] \quad (12)$$

при $h_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, r$) есть положительная величина.

Подставляя дробь (8) в неравенства (10) и умножая полученные неравенства на знаменатель (12), получим неравенства, в которые искомые коэффициенты c_k входят линейным образом

$$\left. \begin{aligned} (Z_s - v_s)x_s^{2r}c_{2r+2} + \dots + (Z_s - v_s)c_{4r+2} - x_s^{2r}c_1 - \dots - c_{2r+1} &\leq 0 \\ (-Z_s - v_s)x_s^{2r}c_{2r+2} + \dots + (-Z_s - v_s)c_{4r+2} + x_s^{2r}c_1 + \dots + c_{2r+1} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Неравенства типа (13) составляются для каждой точки x_s кривой $Z(x)$. Полученная таким путем система линейных неравенств решается методами линейного программирования [Юдин, Гольштейн, 1963]. Соответствующий алгоритм разработан Г. Ш. Рубинштейном [1960].

Степень близости между наблюдаемой $Z(x)$ и подбираемой $\Phi(x)$ кривыми можно оценить иначе, используя не модуль разности (9), а величину среднего квадратического отклонения между ординатами кривых Z и Φ . В этом случае для определения коэффициентов рациональной дроби применяется метод наименьших квадратов [Шалаев, 1961]. Однако Л. В. Канторович считает, что при наличии ошибок, о которых известно только то, что их величина по модулю меньше некоторой величины v , при применении этого метода может произойти значительная потеря информации — большая, чем при использовании неравенств (9) [1962, стр. 707].

Решение системы линейных неравенств методом линейного программирования. Решение системы линейных неравенств (13) — наиболее сложная и трудоемкая задача. В литературе этот вопрос освещен недостаточно. Г. Ш. Рубинштейн, например, соответствующее описание алгоритма излагает на одной странице [1960], используя представления n -мерной геометрии, с которой основная масса геофизиков не знакома. Между тем без знания этого алгоритма невозможно ни разобраться в программе, составленной в настоящее время на машину «Урал-2», ни пересоставить программу на другую машину. Кроме того, иметь представление о данном алгоритме необходимо для разработки способов решения ряда геофизических задач с помощью линейного программирования, позволяющего иногда производить вычисления даже в тех случаях, когда другие методы перестают работать из-за наличия в исходных данных заметных ошибок и помех [Канторович, 1962]. В связи с этим изложим кратко вычислительную схему метода Г. Ш. Рубинштейна без полного приведения всех доказательств.

Допустим, требуется решить систему линейных неравенств

$$e_{i1}c_1 + e_{i2}c_2 + \dots + e_{im}c_m < 0; \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (14)$$

Неравенства (13) превращаются в неравенства (14), если члены неравенств (13) записать в порядке возрастания индексов у коэффициентов c_k , положить $m = 4r + 2$ и обозначить через e_{ij} известные нам величины,

$$-x_s^{2r}; \dots -1; (Z_s - v_s)x_s^{2r}; \dots Z_s - v_s;$$

$$x_s^{2r}; \dots 1; (-Z_s - v_s)x_s^{2r}; \dots -Z_s - v_s.$$

При этом еще допускается, что первому неравенству (13) отвечает индекс i , а второму — индекс $i + 1$.

Перейдем к решению системы неравенств (14). Для этого часть линейных неравенств системы (14) постараемся свести к равенствам. Полученная система линейных уравнений легко решается обычными методами. Для примера возьмем m первых неравенств системы (14). Левые части их отрицательны. Поэтому, прибавляя к левым частям этих неравенств некоторое положительное число

$$c_0 \geq 0, \quad (15)$$

можно получить систему линейных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} c_0 + e_{11}c_1 + \dots + e_{1m}c_m = 0 \\ \vdots \\ c_0 + e_{m-1,m-1}c_{m-1} + \dots + e_{mm}c_m = 0. \end{array} \right\} \quad (16)$$

Допустим, система (16) разрешима. Потребуем, кроме того, выполнения и остальных $2n - t$ неравенств системы (14) после прибавления к их левым частям положительного числа ϵ_0 , т. е.

$$\left. \begin{aligned} c_0 + e_{m+1,1}c_1 + \dots + e_{m+1,m}c_m &\leqslant 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0 + e_{2n,1}c_1 + \dots + e_{2n,m}c_m &\leqslant 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Теперь задачу решения системы неравенств (14) можно рассматривать как задачу линейного программирования: требуется найти максимум линейной формы

$$f = c_0 \quad (18)$$

при наличии ограничений

$$c_0 + e_{i_1}c_1 + \dots + e_{i_m}c_m \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (19)$$

Если найденное таким путем c_0 окажется положительным, то полученные значения неизвестных $c_1, \dots, c_m$, наряду с неравенствами (19), будут удовлетворять и исходные неравенства (14).

При неположительном c_0 исходная система неравенств (14) несовместна. В самом деле, пусть максимальное значение c_0 , допускаемое ограничениями (19), окажется отрицательным:

$$c_0 \leq 0, \quad (20)$$

тогда система исходных неравенств (14) будет неразрешимой. Так, например, в этом случае для первого уравнения системы (16) получим

$$e_{11}c_1 + \dots + e_{1m}c_m = -c_0 \geq 0,$$

что противоречит первому неравенству системы (14).

В качестве нулевого приближения s_0 возьмем

$$c_0^{(0)} = 1. \quad (21)$$

Составим из равенств (16) и (21) систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} c_0^{(0)} &= 1 \\ c_0^{(0)} + e_{11}c_1^{(0)} + \dots + e_{1m}c_m^{(0)} &= 0 \\ \dots & \\ c_0^{(0)} + e_{m1}c_1^{(0)} + \dots + e_{mm}c_m^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Преобразуем первое уравнение системы (22), вычитая из него среднее арифметическое остальных уравнений. Таким путем получим

$$w_1 c_1^{(0)} + \dots + w_m c_m^{(0)} = 1, \quad (23)$$

где

$$w_j = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_{ij}.$$

Заменяя первое уравнение системы (22) равенством (23), найдем эквивалентную систему

$$\left. \begin{aligned} w_1 c_1^{(0)} + \dots + w_m c_m^{(0)} &= 1 \\ c_0^{(0)} + e_{11} c_1^{(0)} + \dots + e_{im} c_m^{(0)} &= 0 \\ . &. \\ c_0^{(0)} + e_{m1} c_1^{(0)} + \dots + e_{mm} c_m^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

С помощью матрицы

$$M_{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & w_1 \dots w_m \\ 1 & e_{11} \dots e_{1m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1 & e_{m1} \dots e_{mm} \end{pmatrix}$$

и вектора

$$\vec{c}^{(0)} = \begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ c_1^{(0)} \\ \vdots \\ c^{(0)} \end{pmatrix} \quad (25)$$

систему (24) запишем следующим образом

$$M_{(0)} \vec{c}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Матрице M_0 соответствует обратная матрица

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} y_{00}^{(0)} & y_{01}^{(0)} & \dots & y_{0m}^{(0)} \\ y_{10}^{(0)} & y_{11}^{(0)} & \dots & y_{1m}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m0}^{(0)} & y_{m1}^{(0)} & \dots & y_{mm}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением ее элементов можно установить, что ее первая строка состоит из положительных элементов

$$y_{00}^{(0)} = 1; \quad y_{0j}^{(0)} = \frac{1}{m} > 0; \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (27)$$

Для получения обратной матрицы M_0^{-1} с положительными элементами в первой строке, что требуется в дальнейшем, система (22) заменена эквивалентной системой (24).

Найдем решение матричного уравнения (26):

$$\vec{c}^{(0)} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \cdot \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{00}^{(0)} \\ y_{10}^{(0)} \\ \cdot \cdot \cdot \\ y_{m0}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Из сопоставления выражений (25) и (28) следует, что искомые коэффициенты $c_i^{(0)}$ совпадают с элементами первого столбца обратной матрицы

$$c_0^{(0)} = y_{00}^{(0)}; \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1^{(0)} &= y_{10}^{(0)} \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \\ c_m^{(0)} &= y_{m0}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Коэффициенты $c_i^{(0)}$ удовлетворяют равенствам (16). Если они также удовлетворяют и неравенствам (17), их можно принять за одно из решений исходной системы неравенств (14). Если некоторые из неравенств (17) окажутся неудовлетворенными, выбираем то из неравенств (17), левая часть которого имеет максимальную положительную величину при подстановке в него компонент вектора $\vec{c}^{(0)}$. Пусть таким будет неравенство

$$e_{\mu^{(0)}1} c_1^{(0)} + \dots + e_{\mu^{(0)}m} c_m^{(0)} > 0, \quad (31)$$

у которого индекс i равен $\mu^{(0)}$.

Удалим из системы линейных уравнений (24) какое-нибудь равенство с индексом $i = \nu$ и заменим его равенством с индексом $i = \mu^{(0)}$

$$c_0^{(1)} + e_{\mu^{(0)}1} c_1^{(1)} + \dots + e_{\mu^{(0)}m} c_m^{(1)} = 0. \quad (32)$$

Полученная таким образом система линейных уравнений имеет в матричной записи вид

$$M_{(1)} \vec{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \cdot \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где $\vec{c}^{(1)}$ — следующее приближение искомого вектора $\vec{c}$; $M_{(1)}$ — матрица, отличающаяся от матрицы $M_{(0)}$ строкой с индексом $i = \nu$.

С помощью обратной матрицы $M_{(1)}^{-1}$ найдем решение матричного уравнения (33)

$$\vec{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ c_1^{(1)} \\ \cdot \cdot \cdot \\ c_m^{(1)} \end{pmatrix} = M_{(1)}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \cdot \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{00}^{(1)} \\ y_{10}^{(1)} \\ \cdot \cdot \cdot \\ y_{m0}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Существует простая форма, связывающая элементы $y_{ij}^{(1)}$ обратной матрицы $M_{(1)}^{-1}$ с элементами $y_{ij}^{(0)}$ обратной матрицы M_0^{-1} [Юдин, Гольштейн, 1963]

$$y_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{r_v^{(0)}} y_{iv}^{(0)} & \text{при } j = v, \\ y_{ij}^{(0)} - \frac{r_j^{(0)}}{r_v^{(0)}} y_{iv}^{(0)} & \text{при } j \neq v, \end{cases} \quad (35)$$

где

$$\begin{cases} \vec{r}^{(0)} = (r_0^{(0)}; r_1^{(0)}; \dots; r_m^{(0)}) = \vec{E}_{\mu(0)} M_{(0)}^{-1} \\ \vec{E}_{\mu(0)} = (1; e_{\mu(0)1}; \dots; e_{\mu(0)m}) \end{cases} \quad (36)$$

При $i = j = 0$ с помощью выражения (35) найдем

$$y_{00}^{(1)} = y_{00}^{(0)} - \frac{r_0^{(0)}}{r_v^{(0)}} y_{0v}^{(0)},$$

или, согласно равенствам (29) и (34), получим

$$c_0^{(1)} = c_0^{(0)} - \frac{r_0^{(0)}}{r_v^{(0)}} y_{0v}^{(0)}. \quad (37)$$

Коэффициент $c_0^{(1)}$ по тем же соображениям, что и величина $c_0^{(0)}$, должен быть положительным

$$c_0^{(1)} > 0. \quad (38)$$

Используя равенство (36), найдем

$$r_0^{(0)} = y_{00}^{(1)} + e_{\mu(0)1} y_{10}^{(1)} + \dots + e_{\mu(0)m} y_{m0}^{(1)}, \quad (39)$$

или, согласно выражению (34),

$$r_0^{(0)} = c_0^{(1)} + e_{\mu(0)1} c_1^{(1)} + \dots + e_{\mu(0)m} c_m^{(1)}. \quad (40)$$

Откуда с помощью соотношений (34) и (38) установим, что величина $r_0^{(0)}$ положительна

$$r_0^{(0)} > 0. \quad (41)$$

Из выражений (21), (27) и (44) следует, что величины $c_0^{(0)}$, $y_{0v}^{(0)}$ и $r_0^{(0)}$, входящие в равенство (37), положительны.

Коэффициент $r_v^{(0)}$, индекс v которого пока еще не закреплен, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При отрицательных значениях $r_v^{(0)}$ коэффициента $c_0^{(1)}$ будет больше $c_0^{(0)}$. Но уже и при $c_0 = c_0^{(0)}$ некоторые из неравенств (17) не удовлетворялись, поэтому c_0 надо не увеличивать, а уменьшать. В связи с этим будем рассматривать только те индексы v , которым соответствуют положительные значения $r_v^{(0)}$. В этом случае правая часть равенства (37) представляет собой разность двух положительных слагаемых. При слишком большой величине отношения $y_{0v}^{(0)}/r_v^{(0)}$ это разность, т. е. величина $c_0^{(1)}$, может стать отрицательной, что нельзя допускать в силу условия (38). Поэтому для безопасности выберем такой индекс $v = v^{(0)}$, при котором отношение $y_{0v}^{(0)}/r_v^{(0)}$ минимально, т. е.

$$\frac{y_{0v}^{(0)}}{r_v^{(0)}} = \min_v \frac{y_{0v}^{(0)}}{r_v^{(0)}} \text{ при } r_v^{(0)} > 0. \quad (42)$$

Заметим, что такой выбор индекса $v = v^{(0)}$ обеспечивает неотрицательность и остальных элементов $y_{0j}^{(1)}$ первой строки обратной матрицы $M_{(1)}^{-1}$, позволяя тем самым сохранить приведенные выше рассуждения на следующем шаге. При этом нужно только вместо соотношений (27) использовать соотношения $y_{0j}^{(1)} \geq 0$.

Изложенный выше вычислительный процесс является итерационным. При k -ой итерации используются формулы (31), (35), (36) и (42) после замены в них индекса (0), стоящего в круглых скобках, на $(k-1)$ и индекса (1) на (k) . Кроме того, в формуле (35) следует вместо v поставить $v^{(k-1)}$. Все вычисления на k -ой итерации после замены индексов складываются из следующих процедур: 1) определения индекса $\mu^{(k-1)}$, которому соответствует неравенство (31); 2) вычисления компонент вектора $\vec{r}^{(k-1)}$ по формуле (36); 3) определения индекса $v^{(k-1)}$ из соотношения (42); 4) перехода от матрицы $M_{(k-1)}^{-1}$ к матрице M_k^{-1} с помощью формулы (35); 5) проверки выполнения условия $c_0^{(k)} = y_{00}^{(k)} > 0$; 6) проверки выполнения неравенств (14), если в них подставить коэффициенты первого столбца обратной матрицы $M_{(k)}^{-1}$: $c_i^{(k)} = y_{i0}^{(k)}$.

Своеобразие этого вычислительного процесса состоит в том, что определяется максимум величины c_0 , хотя после каждой итерации величина c_0 уменьшается или во всяком случае не возрастает. Коэффициент c_0 уменьшается до тех пор, пока не будут выполнены все неравенства (14) или пока он сам не станет отрицательным или нулем. В последнем случае система неравенств (14) неразрешима. У невырожденных задач число итераций конечно. Вырождение в линейном программировании встречается редко [Юдин, Гольштейн, 1963]. Отметим также, что линейное программирование можно рассматривать как частный случай применения метода наискорейшего спуска для решения линейных задач [Зойтендейк, 1963].

Рациональные дроби в магниторазведке. Имеется кривая Z (или ΔT) по профилю, расположенному вкост простирания системы маломощных пластов. Пусть методом аппроксимации для кривой Z подобрана рациональная дробь

$$\Phi(x) = \frac{c_1 x^4 + c_2 x^3 + \dots + c_5}{x^4 + c_7 x^3 + \dots + c_{10}}$$

и найдены численные значения ее коэффициентов. Составленная программа позволяет подбирать дроби, в числителе и знаменателе которых стоят полиномы степени не выше 12-ой, что соответствует шести маломощным пластам.

Для определения параметров x_k , h_k , P_k и Q_k разложим рациональную дробь на простейшие дроби. С этой целью найдем корни ее знаменателя

$$x^4 + c_7 x^3 + c_8 x^2 + c_9 x + c_{10} = 0. \quad (43)$$

В составленной программе корни полинома вычисляются способом, изложенным у В. Э. Милна [1956]. Он состоит в разложении многочлена (43) на полиномы второй степени

$$x^4 + c_7 x^3 + \dots + c_{10} = (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \quad (44)$$

и решении квадратных уравнений

$$x^2 + p_k x + q_k = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (45)$$

где p_k и q_k — некоторые коэффициенты, вычисляемые методом, изложенным В. Э. Милном.

Как следует из формулы (8), полином (43) разлагается на полиномы второй степени вида

$$x^4 + c_7 x^3 + \dots + c_{10} = [(x - x_1)^2 + h_1^2] [(x - x_2)^2 + h_2^2], \quad (46)$$

так что квадратное уравнение (45) оказывается эквивалентным уравнению

$$x^2 + p_k x + q_k = (x - x_k)^2 + h_k^2 = x^2 - 2x_k x + x_k^2 + h_k^2 = 0, \quad (47)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_k &= -2x_k \\ q_k &= x_k^2 + h_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Квадратное уравнение (47) имеет комплексные корни $x_k \pm ih_k$, у которых вещественная часть совпадает с абсциссой x_k , а абсолютная величина мнимой части — с ординатой h_k верхней кромки k -го маломощного пласта.

Параметры P_k и Q_k рациональной дроби (8) по известным величинам c_k , x_k и h_k могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. В составленной программе для этой цели решалась система линейных уравнений, которая при $r = 2$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= c_2 - c_1 c_7 \\ p_2 P_1 + p_1 P_2 + Q_1 + Q_2 &= c_3 - c_1 c_8 \\ q_2 P_1 + q_1 P_2 + p_2 Q_1 + p_1 Q_2 &= c_4 - c_1 c_9 \\ q_2 Q_1 + q_1 Q_2 &= c_5 - c_1 c_{10} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Система (49) получена из сопоставления коэффициентов при одинаковых степенях x числителей дробей

$$\frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + A = \frac{c_1 x^4 + \dots + c_5}{x^4 + \dots + c_{10}} \quad (50)$$

после приведения левой части равенства (50) к общему знаменателю. Параметры β_k и $I_k \varepsilon_k$ определяются с помощью формулы (6).

Когда корни квадратных трехчленов $x^2 + p_k x + q_k$ оказываются вещественными x_k и x'_k , квадратный трехчлен распадается на два вещественных множителя

$$x^2 + p_k x + q_k = (x - x_k)(x - x'_k), \quad (51)$$

в силу чего

$$\frac{P_k x + Q_k}{x^2 + p_k x + q_k} = \frac{A_k}{x - x_k} + \frac{A'_k}{x - x'_k}, \quad (52)$$

где постоянные A_k и A'_k легко вычислить методом неопределенных коэффициентов по значениям величин p_k , q_k , P_k и Q_k . Выражение типа (52) соответствует криволинейному фону. В наших практических примерах точки с абсциссами x_k и x'_k располагаются на оси абсцисс за пределами графика, который аппроксимирован рациональной дробью. Как постоянный A , так и криволинейный фон (52) вводятся автоматически. При использовании составленной программы геофизику следует лишь учитывать, что при наличии криволинейного фона максимальное число подбираемых маломощных пластов уменьшается на один пласт.

Для придания данной методике устойчивости аппроксимация начинается с подбора коэффициентов дроби $\Phi(x)$, соответствующей одному пласту. По формуле (8) при $r = 1$ вычисляется теоретическая кривая $\Phi(x)$ и сравнивается с наблюдаемой кривой $Z(x)$. Если неравен-

ства (9) или полученные из них неравенства (14) будут удовлетворены, то процесс вычисления на этом заканчивается. В противном случае надо положить $r = 2$ и подобрать для наблюдаемой кривой аналитическое выражение (8), соответствующее двум маломощным пластам.

В настоящее время составлены две программы, одна из которых предусматривает увеличение r до трех, а другая — до шести. Если и при $r = 3$ или $r = 6$ удовлетворены не все неравенства (9), то v_s автоматически увеличивается в $1,5$; $1,5^2 \dots$ раз и процесс вычисления повторяется сначала. Вычисления прекращаются после выполнения неравенств (9) при всех значениях s .

Интересно отметить, что в экспериментальном порядке на печать выдавались параметры пластов при неудовлетворении неравенств (9), хотя бы при одном значении s . Иногда значения параметров, вычисленные таким путем, отличались от истинных величин на 50% и более, а на оси абсцисс появлялись вещественные корни, расположенные в пределах интерпретируемого графика. Это обстоятельство побудило предусмотреть в программе указанное выше увеличение исходных значений v_s в $1,5$; $1,5^2$; $1,5^3$; $\dots$ раз. Составленная таким путем программа, проверенная на нескольких сотнях практических кривых Z и ΔT из разных районов СССР, оказалась очень устойчивой в работе. Интерпретация кривой Z или ΔT средней сложности на машине «Урал-2» занимала несколько минут.

Кривые ΔT , если можно их рассматривать как кривые Z при косом намагничивании, интерпретируются так же, как и графики Z . При этом следует лишь учитывать, что на табулограмме вместо произведения $I_k \varepsilon_k$ печатаются значения $I_k \varepsilon_k$, умноженные на некоторый дополнительный множитель, а угол β_k приобретает несколько иной смысл [Логачев, 1962].

Перейдем к практическим примерам.

На рис. 1 представлена кривая Z , полученная в районе магнетитового месторождения. В машину «Урал-2» вводили ординаты кривой Z_s и значения v_s , характеризующие точность съемки и уровень помех.

Первой особой точке соответствует сравнительно небольшая величина произведения $I_1 \varepsilon_1 = 80 \cdot 10^{-6}$ э.км, поэтому, даже не имея геологического разреза, эту точку нельзя принять за верхнюю кромку магнетитового тела.

У второй точки произведение $I_2 \varepsilon_2$ имеет большую величину, равную $3500 \cdot 10^{-6}$ э.км. Точка расположена вблизи верхней кромки магнетитового тела.

Если принять истинную мощность пласта магнетита равной $\varepsilon_2 = 0,05$ км и воспользоваться формулой $I_2 = \kappa_2 T$, то при $T = 0,7$ э можно вычислить κ_2 :

$$\kappa_2 0,05 \cdot 0,7 = 3500 \cdot 10^{-6}$$

или

$$\kappa_2 = 100\,000 \cdot 10^{-6} \text{ СГС},$$

что согласуется с результатами определения физических свойств магнетитов.

Кривая Z , представленная на рис. 2, получена на участке Русской платформы, где поверхность кристаллического фундамента залегает на сравнительно большой глубине, так что условие (5) в этом случае легко выполняется. Следовательно, можно использовать для интерпретации аномалии системы маломощных пластов.

Кривая осложнена довольно заметными ошибками. Для этой кривой машина «Урал-2» подобрала три особые точки. Две точки залегают на приблизительно одинаковой глубине, и им соответствуют близкие значения произведений интенсивности намагниченности на мощность. Третья точка имеет резко отличную глубину залегания, и ей соответствует также

резко отличное произведение $I_3\epsilon_3$. Поэтому для определения глубины залегания поверхности кристаллического фундамента использовались только первая и вторая точки. Их средняя глубина оказалась равной 1,25 км. Скважина, расположенная в 26 км от центра аномалии, встретила поверхность кристаллического фундамента на глубине 1,06 км.

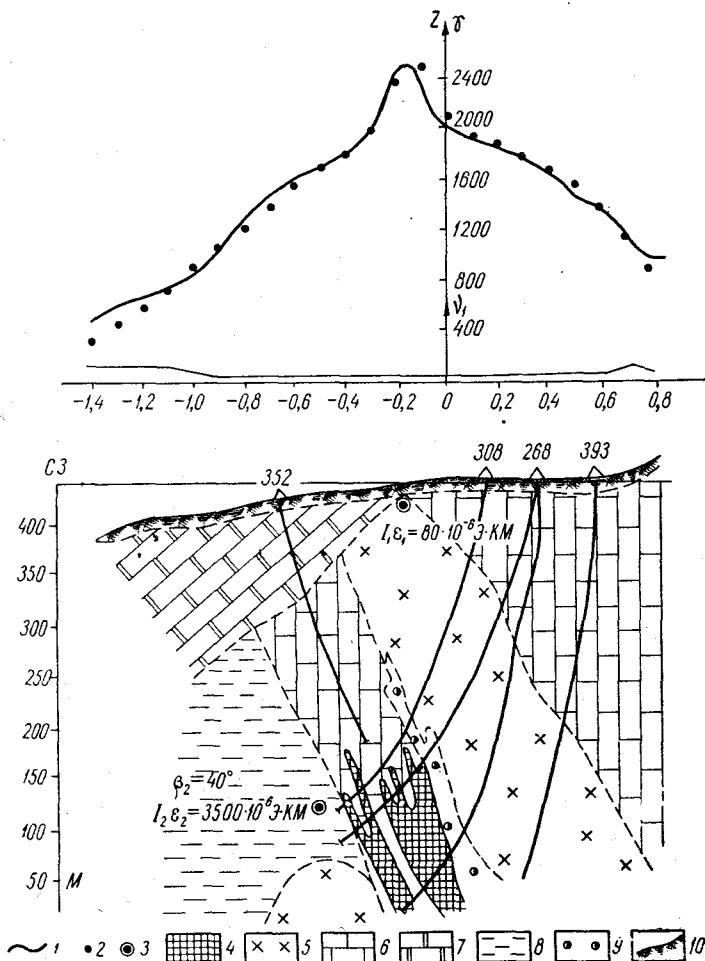


Рис. 1. Кривая Z над магнетитовым месторождением.

1 — исходная кривая; 2 — точки кривой, подобранные машиной; 3 — особые точки, соответствующие верхним кромкам маломощных пластов; 4 — магнетитовое рудное тело; 5 — диориты; 6 — известняки, доломиты; 7 — тонкопереслаивающиеся карбонатные отложения; 8 — глинистые сланцы, аргиллиты, алевролиты; 9 — сланцы безрудные; 10 — четвертичные отложения.

Для интерпретации графика a (рис. 3) использовалась программа, рассчитанная на максимальное число подбираемых пластов, равное трем.

Кривая a рис. 3 имеет четкий максимум и два небольших минимума по бокам. Два маломощных пласта по формуле (2) уйдут на учет влияния верхней и нижней кромок магнитного объекта, а один пласт надо зарезервировать на случай появления криволинейного фона. Поэтому на учет небольших искажений правой ветви кривой пластов больше не остается. В связи с этим в местах искажения правой ветви графика Z значения v_s заданы сравнительно большие.

Машиной подобраны две особые точки. Первая особая точка, соответствующая верхней кромке пласта, залегает на глубине 1,25 км. По данным

бурения поверхность кристаллического фундамента в этом районе находится на глубине 1,20 км.

Для первой и второй особых точек углы $\beta_1 = -3^\circ$ и $\beta_2 = 170^\circ$ отличаются друг от друга примерно на 180° , поэтому можно утверждать, что вторая особая точка соответствует нижней кромке пласта. Это легко понять, если вспомнить, что пласт, ограниченный по падению, можно представить как разность двух пластов, бесконечно вытянутых по падению. Глубина залегания нижней кромки оказалась равной 8 км.

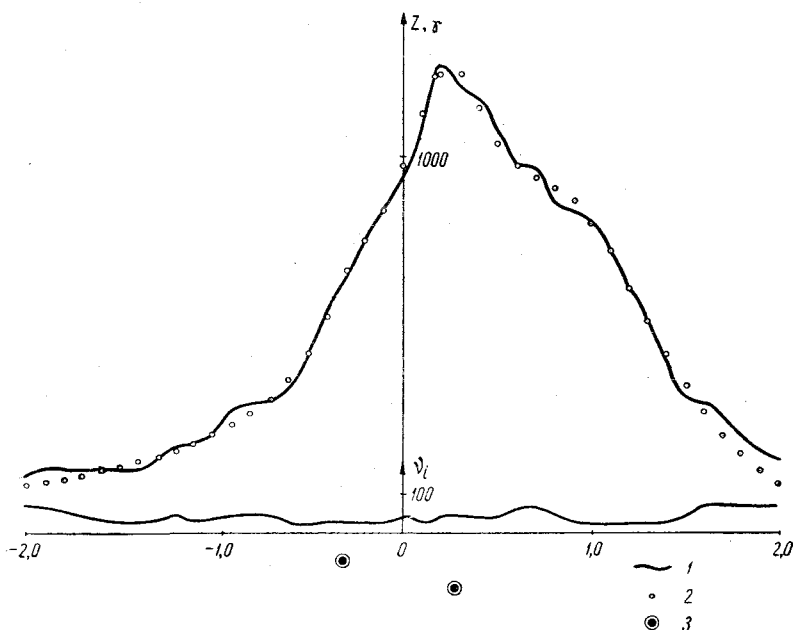


Рис. 2. Пример интерпретации на машине «Урал-2» кривой Z , осложненной заметными ошибками:

1 — исходная кривая; 2 — точки кривой, подобранные машиной; 3 — особые точки, соответствующие верхним кромкам маломощных пластов.

На рис. 3, б, где представлена правая часть графика a , имеются три небольших искажения, каждое из которых может соответствовать маломощному пласту.

Величины v_s заданы таким образом, чтобы добиться наибольшего совпадения исходной Z и подбираемой Φ кривых в районе двух искажений кривой Z . Третье искажение кривой Z нами во внимание не принимается, поэтому для него значения v_s взяты большими. Это связано с тем, что третий пласт мы вынуждены были оставить для учета влияний криволинейного фона. Соответствующие ему два вещественных корня $x_3 = -2,1$ и $x_3 = 1,91$ показаны на оси абсцисс.

В некоторых случаях выбор v_s можно поручить машине, для чего следует задать значения v_s заведомо меньше действительной их величины. Машина сама их увеличит до нужных значений, однако это связано с лишней затратой машинного времени, что не всегда экономически целесообразно.

Один час работы машины «Урал-2» стоит 50 руб. Интерпретация кривой средней сложности занимает 4—5 мин. Задание преуменьшенных значений v_s может увеличить это время до 10 мин и иногда более. Время интерпретации на машине также растет с ростом числа ординат, вводимых

в машину, поэтому вводить в машину чрезмерно большое число ординат экономически не целесообразно.

Гравиразведка. Кривую аномалии силы тяжести, построенную по результатам измерений, произведенных в n точках неровной земной поверх-

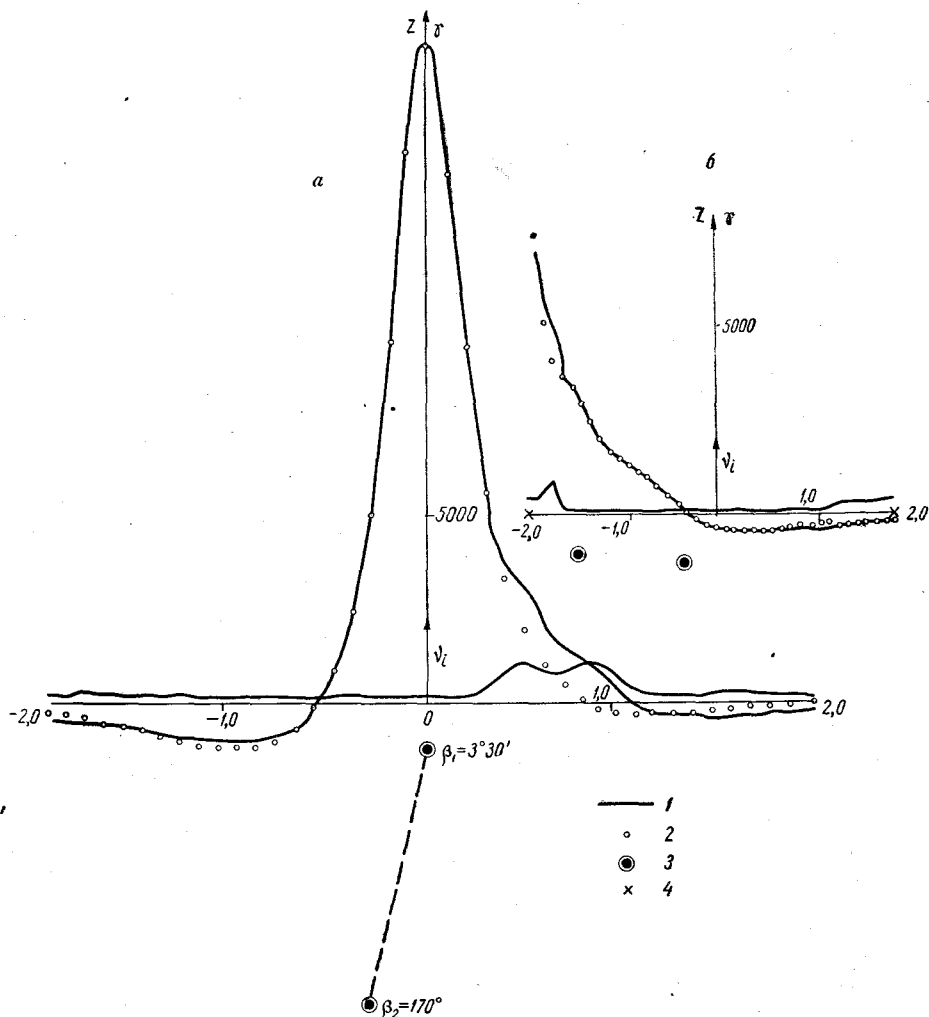


Рис. 3. Аномалия Z одного из районов Русской платформы: a — интерпретация всей аномалии целиком; b — интерпретация правой ветви аномалии.

1 — исходная кривая; 2 — точки кривой $\Phi(x)$, подобранные машиной; 3 — точки, соответствующие верхним или нижним кромок маломощных пластов; 4 — вещественные корни.

ности, будем аппроксимировать в трехмерном случае аналитическим выражением

$$\Delta g(x, y, h) = \sum_{k=1}^r \frac{f m_k (h_k - h)}{[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (h - h_k)^2]^{3/2}}, \quad (53)$$

где f — гравитационная постоянная.

Для сведения задачи к линейной заранее зададимся значениями координат x_k, y_k, h_k , определяющих местоположение материальных точек, и будем находить избыточные массы m_k . Такая методика предложена

Е. Г. Булахом и А. А. Юньковым [1958]. Для вычисления значений m_k составим неравенства

$$\left| \Delta g_s - \sum_{k=1}^r a_{sk} m_k \right| < v_s, \quad (54)$$

где a_{sk} — известные нам коэффициенты ($s = 1, 2, \dots, n$).

$$a_{sk} = \frac{f(h_k - h_s)}{[(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2 + (h_s - h_k)^2]^{3/2}}, \quad (55)$$

$$\Delta g_s = \Delta g(x_s, y_s, h_s).$$

Решив систему линейных неравенств (54), используя линейное программирование, можно найти избыточные массы. Аналогичные вычисления, сделанные Л. В. Канторовичем и Г. Ш. Рубинштейном [1962] при дополнительном предположении

$$m_k \geq 0 \quad (56)$$

показали, что таким путем определяются массы m'_k , отличные от m_k . Однако с помощью величин m'_k удается найти общую избыточную массу тела

$$M = \sum_{k=1}^r m'_k = \sum_{k=1}^r m_k \quad (57)$$

и его координаты центра тяжести X, Y, H

$$X = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^r x_k m'_k; \quad Y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^r y_k m'_k; \quad H = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^r h_k m'_k. \quad (58)$$

Формулу (53), если в нее подставить вычисленные избыточные массы m'_k , можно использовать для пересчета поля на горизонтальную плоскость и для вычисления производных. Так, например, производная по x будет равна

$$\frac{\partial \Delta g(x, y, h)}{\partial x} = \sum_{k=1}^r \frac{3f m'_k (h_k - h)(x_k - x)}{[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (h - h_k)^2]^{5/2}}. \quad (59)$$

В некоторых случаях вычисляются и сами избыточные массы m_k , если ввести более строгие ограничения, чем неравенства (56). Например, положим, что избыточные массы m_k равны нулю или некоторой постоянной m

$$m_k = \begin{cases} 0 \\ m \end{cases}. \quad (60)$$

Соотношение (60) позволяет ввести целочисленные переменные

$$\varepsilon_k = \frac{m_k}{m} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad (61)$$

принимающие значения 0 или 1.

С помощью переменных ε_k равенство (57) записывается следующим образом

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^r \varepsilon_k = \frac{1}{m}, \quad (62)$$

где общую избыточную массу M следует считать известной, так как ее можно найти, используя изложенную выше методику [Канторович, 1962].

Равенства (61) и (62) позволяют преобразовать неравенства (54) следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r \left(\frac{\Delta g_s - v_s}{M} - a_{sk} \right) \varepsilon_k < 0 \\ \sum_{k=1}^r \left(\frac{-\Delta g_s - v_s}{M} - a_{sk} \right) \varepsilon_k < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (63)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$.

Система линейных неравенств (63) при ограничениях (61) решается методом целочисленного программирования [Гомори, Баумол, 1962]. В настоящее время для этой цели составлена программа на машину «Урал-2» при $r \leq 10$.

Линейное программирование в электроразведке. Электроразведка выгодно отличается от магниторазведки и гравиразведки возможностью получения различных полей при изменении питающих электродов.

В последнее время в методе заряда, наряду с измерением электрического потенциала на поверхности земли, стали применяться измерения его по скважинам. Использование скважинных измерений позволяет повысить в несколько раз надежность интерпретации.

Определим с помощью линейного программирования величины заряда Q_0 и коэффициентов d_{ijk} в формуле

$$U(x, y, h) = Q_0 \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (h-h_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (h+h_0)^2}} \right] + \sum_{i,j,k=0}^r d_{ijk} x^i y^j h^{2k}, \quad (64)$$

где x_0, y_0, h_0 и $x_0, y_0, -h_0$ — координаты точки заземления источника тока и ее зеркального изображения относительно плоской земной поверхности соответственно.

Дифференцируя формулу (64) по x, y, h , можно вычислить первые и вторые производные по x, y и h для ряда точек T_s , расположенных на поверхности земли и в скважине (рис. 4).

Исходя из соотношения, справедливого для плотности тока j в точках, не содержащих источников тока,

$$\operatorname{div} j = 0$$

и используя уравнение, связывающее проводимость γ с плотностью тока

$$j = -\gamma \operatorname{grad} U,$$

найдем основное уравнение

$$U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{hh} + \tau'_x U'_x + \tau'_y U'_y + \tau'_h U'_h = 0, \quad (65)$$

где

$$\tau = \ln \gamma.$$

Производные $U'_x, U'_y, U'_h, U''_{xx}, U''_{yy}, U''_{hh}$, входящие в формулу (65), следует считать для точек T_s известными, так как их можно вычислить, дифференцируя выражение (64).

Ввиду наличия помех, равенство (65) выполняется приближенно с точностью до малой величины ν

$$|U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{hh} + \tau'_x U'_x + \tau'_y U'_y + \tau'_h U'_h| < \nu. \quad (66)$$

Допустим, для τ справедливо разложение в ряде Фурье

$$\tau = \sum_{i,j,k=0}^r (A_{ijk} \cos ix \cos jy + B_{ijk} \sin ix \cos jy + C_{ijk} \sin ix \sin jy) \cos kh. \quad (67)$$

Подставим равенство (67) в неравенство (66) и положим

$$x = x_s; \quad y = y_s; \quad h = h_s,$$

где x_s, y_s, h_s — координаты точки T_s (рис. 4).

После этого получим одно линейное неравенство для определения коэффициентов Фурье $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$. Такие неравенства составляются для ряда точек T_s при различных положениях питающего электрода.

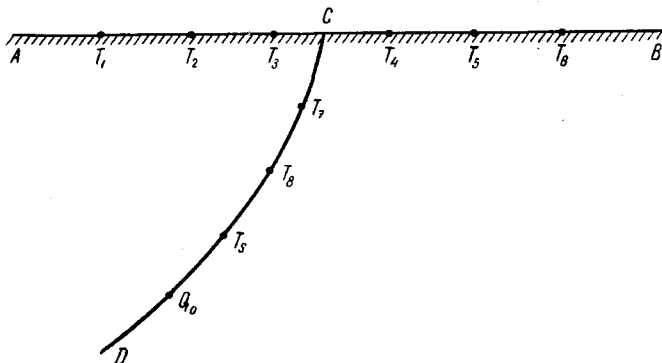


Рис. 4. Расположение точек T_s : AB — земная поверхность; CD — ось скважины; Q_0 — точка заземления.

Полученная система решается методами линейного программирования. Для придания методу устойчивости число r увеличивается постепенно.

Как показало опробование на практике, эта методика при использовании значений потенциала, измеренных в скважине, позволяет сравнительно надежно вычислить коэффициенты $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$, а затем с помощью формулы (67) — построить изолинии истинных логарифмических проводимостей τ для различных вертикальных и горизонтальных сечений нижнего полупространства. Проводимость τ определяется с точностью до некоторой постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

- Булах Е. Г. и Юнков А. А. О точности определения плотностей аномальных масс методом сеток. ДАН УССР, № 11, 1958.
- Гомори Р. Е. и Баумол В. И. Целочисленное программирование и оценки. Сб. Численные методы оптимального планирования. Экон.-матем. сер. Сиб. отд. АН СССР, вып. 1, 1962.
- Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. ИЛ, 1963.
- Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений. Сиб. матем. ж., т. III, № 5, 1962.
- Каган Б. М. и Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. Изд-во «Энергия», 1964.
- Логачев А. А. Курс магниторазведки. Гостехиздат, 1962.
- Милн В. Э. Численный анализ. ИЛ, 1956.
- Рубинштейн Г. Ш. О равномерном приближении непрерывных функций. Успехи матем. наук, т. 15, вып. 3, 1960.
- Шалаев С. В. О количественном геологическом истолковании сложных магнитных аномалий на электронных цифровых машинах. Прикладная геофизика, вып. 31, 1961.
- Шалаев С. В. Об использовании особых точек потенциальных полей при интерпретации геофизических данных. Прикладная геофизика, вып. 33, 1962.
- Юдин Д. Б. и Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. Физматгиз, 1963.