Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. L, вып. 2, 1966 г.

ИСТОРИЯ И ПУТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

И. И. Шафрановский

Одним из актуальных вопросов сегодняшнего дня является внедрение математики в область геолого-минералогических наук. В связи с этим поучительно проследить на примере кристаллографии, как из чисто описательной естественноисторической дисциплины, тесно связанной с минералогией, выросла современная наука о кристаллах, которая отличается прежде всего строго математическим характером. Одним из величайших кристаллографов, поставившим кристаллографию, по словам А. К. Болдырева, «. . . прочно, неизменно и невозвратно на точный математический, геометрический базис» [1921], был всемирно известный профессор и директор Петербургского горного института (ныне Ленинградского горного института) Е. С. Федоров (1853—1919). В этом же направлении успешно работал и его выдающийся ученик А. К. Болдырев (1883—1946), а еще позднее — талантливейший представитель федоровской школы В. И. Михеев (1912—1956). Они внесли существенный вклад в развитие математических основ современной кристаллографии, навсегда связав историю этой науки с историей Ленинградского горного института.

Обращаясь к самым ранним истокам кристаллографии, тесно связанной тогда с минералогией, мы видим стремление ученых дать словесные характеристики природным кристаллическим образованиям. Так, например, Г. Агрикола (1494—1555), классифицируя по внешнему виду ископаемые тела, различал таблитчатые, круглые, угловатые и другие формы.

Эти словесные характеристики уже содержат слабые намеки на геометрию кристаллов. Описывая угловатые фигуры, Агрикола отмечал треугольные, четырехугольные, пятиугольные, шестиугольные и многоугольные тела. *

Одинокой и преждевременной оказалась замечательная попытка И. Кеплера (1571—1630) объяснить возникновение шестиугольных форм на снежинках геометрией плотнейших шаровых упаковок (1619). Именно по этому пути пошли впоследствии Р. Гук (1635—1703) и М. В. Ломоносов (1711—1756). В наше время, как известно, понятие о плотнейших шаровых упаковках легло в основу структурной кристаллографии. Менее удачным оказалось предположение И. Кеплера о тождестве форм драгоценных камней с пятью правильными выпуклыми многогранниками Платона — тетраэдром, кубом, октаэдром, додекаэдром и икосаэдром. Две последние фигуры обладают пятерными осями симметрии и поэтому вообще для кристаллов исключены. Здесь неудача И. Кеплера объясняется

* За много веков до него Плиний Старший также называл кристаллы горного хрусталя шестиугольными, а золота и алмаза — четырехугольными. Характерно, что и Агрикола и Плиний сравнивали пространственные формы кристаллов с плоскими многоугольниками.

тем, что он исходил не столько из наблюдений над реальными кристаллами, сколько из своей излюбленной идеи о всеобщей гармонии мира. Попытка И. Кеплера подвести единый геометрический базис под кристаллографию оказалась слишком ранней и недостаточно подкрепленной фактическим материалом. Последующие исследователи кристаллов длительное время вынуждены были придерживаться традиций словесно-описательной школы. Некоторую математичность в качественные описания вносил лишь закон постоянства углов, открытый в 1669 г. Н. Стеноном (1638—1686), а затем заново установленный М. В. Ломоносовым (1749) и Ж. Б. Ромэ Делилем (1736—1790). Геометрические закономерности кристаллического огранения, хотя и смутно, но уже осознавались в то время. Об этом свидетельствует характерное высказывание учителя М. В. Ломоносова — Ф. Генкеля (1678—1744), относящееся к 1725 г.: «Природа в своих сочетаниях и смещениях раз и навсегда соизволила избрать связь, структуру и внешнее строение веществ, согласно их свойству и соответственно внешним условиям и обстоятельствам. От этого принятого правила она уже не отступает, а ставит циркуль и отмеряет углы, раз и навсегда установленные для разных веществ» [Шафрановский, 1961]. Этому высказыванию Ф. Генкеля созвучна выдержка из трактата М. В. Ломоносова «О слоях земных» (1763): «Наконец отличною фигурой известные и больше всех дорогие камни последуют в своем рождении законам геометрическим углами и плоскостьми» [1954]. И все же к концу XVIII в. общепризнанным законодателем в минералогии и кристаллографии явился ученый не математического склада, а ярко выраженный представитель описательного направления — профессор Фрейбергской горной академии А. Г. Вернер (1749—1817). Все разнообразие кристаллографических форм он стремился свести к семи основным фигурам: правильному икосаэдру, правильному додекаэдру, параллелепипеду, призме, пирамиде, таблице и чечевице. Среди основных форм Вернера снова встречаются икосаэдр и додекаэдр, невозможные в кристаллографии. Это вызвано тем, что А. Г. Вернер обходился без точных измерений, ограничиваясь описанием внешнего вида кристаллов (за правильный додекаэдр он принимал кристаллографический пентагон-додекаэдр пирита, а за икосаэдр — комбинацию пентагон-додекаэдра с октаэдром на кристаллах того же минерала). Тогда подход Вернера имел свое оправдание: слишком несовершенными и трудоемкими были методы исследования минералогических и кристаллографических объектов. Вместе с тем подробная словесная характеристика, безусловно, помогала практикам горного дела узнавать и различать полезные ископаемые. Однако с дальнейшим развитием науки такой подход не мог удержаться. Уже ближайшие ученики Вернера осознали необходимость развития математически точных методов исследования. Один из них — создатель известной десятибалльной шкалы твердости Ф. Моос (1773—1839) писал: «Обучение минералогии требует основательной, математически точной, правильной и, главное, переработанной для этой цели кристаллографии. Старая описательная кристаллография Вернера оказалась совершенно неприемлемой. Ей не доставало математической четкости, а кроме того она изобиловала погрешностями ...» [Бернштейн, 1955]. Сам Ф. Моос, а также его соученик и соперник Х. С. Вейс (1780—1856) применили для уточнения кристаллографических характеристик координатные оси, параллельные кристаллографическим ребрам. Такой прием привел обоих ученых к открытию семи кристаллических систем (сингоний), лежащих и сейчас в основе кристаллографии.

В отличие от Вернера, его знаменитый французский соперник Р. Ж. Гаюи (1743—1822) с самого начала своей работы в области кристаллографии ясно осознал математический характер этой науки. В предисловии к своей первой монографии «Опыт теории структуры кристаллов» (1784) он предупреждает, что для понимания выводов «требуется знание алгебры

и геометрии» [1962]. Рассматривая кристаллический многогранник как результат сложения молекулярных «кирпичиков», Р. Ж. Гаюи подошел к чисто геометрической проблеме выполнения пространства равными и параллельно ориентированными полиэдрами (впоследствии этот вопрос нашел свое разрешение в теории параллелоэдров Е. С. Федорова). Теория Р. Ж. Гаюи в дальнейшем дала толчок развитию учения о решетчатом строении кристаллов. Впервые Р. Ж. Гаюи обратил внимание на то, что, разглядывая кристалл с разных сторон, наблюдатель нередко фиксирует как бы повторение одной и той же картины, так как кристалл состоит из повторяющихся равных частей. Итак, французский ученый одним из первых уловил симметричное строение кристаллических тел. Исходя из своей структурной теории, Р. Ж. Гаюи открыл закон рациональности отношений параметров (закон целых чисел), лежащий и сейчас в основании раздела о кристаллографических символах. Он же доказал невозможность появления правильных додекаэдров и икосаэдров на кристаллах (тем самым показал несовместимость пятерной симметрии с геометрией кристаллического строения).

Дальнейшее развитие кристаллографии потребовало детальной математической разработки учения о симметрии. Исторически сложилось так, что это чисто математическое учение сначала разрабатывалось кристаллографами, а затем уже привлекло к себе внимание математиков. В 1830 г. марбургский профессор минералогии и технологии И. Ф. Гессель (1796—1872) опубликовал полный вывод всех видов и классов симметрии для конечных фигур вообще и кристаллических многогранников в частности. В основу своего вывода Гессель положил понятие об универсальном элементе симметрии, охватывающем все известные нам сейчас элементы конечной симметрии: «Тело, дающее по отношению нормали, проведенной через его центральную точку, идентичные горизонтальные проекции, могущие меняться своими местами путем вращения вокруг упомянутой нормали, называется *P*-членным. Нормаль, вокруг которой производится вращение, соответствует *P*-членной оси данного тела» [1897]. Это определение, несмотря на всю свою громоздкость, весьма значительно. Под понятие *P*-членной оси подходят простые и сложные оси симметрии, в том числе и центр инверсии, и плоскость симметрии, т. е. все без исключения элементы конечной трехмерной симметрии. Значительные достижения И. Ф. Гесселя прошли в свое время совершенно незамеченными и непонятыми. По словам Е. С. Федорова, «поразительная неподготовленность большинства минералогов к восприятию идей, имеющих математическую подкладку, сделала бесполезным для науки труд Гесселя» [1891]. Лишь через 60 лет после опубликования этого труда и через 20 лет после смерти Гесселя кристаллографы заново открыли его вывод.

Не нашли своевременного признания и работы французского кристаллографа О. Браве (1811—1863). В своем мемуаре «О многогранниках симметричной формы» он, независимо от И. Ф. Гесселя, пытался вывести все совокупности элементов симметрии для конечных фигур. Однако О. Браве не дал исчерпывающего определения симметрии, ограничившись лишь перечнем известных ему элементов симметрии. Согласно О. Браве, «симметричный многоугольник должен обладать либо центром симметрии, либо одной или несколькими осями симметрии, либо одной или несколькими плоскостями симметрии» [1866]. Как видим, в приведенном наборе элементов симметрии отсутствуют оси сложной симметрии (инверсионные или зеркально-поворотные). Это не могло не отразиться на полноте вывода видов симметрии.

Главным достижением О. Браве является его учение о пространственных решетках, развитое в «Мемуаре о системах точек, правильно распределенных на плоскости или в пространстве» (1850).

Исходя из однородности и анизотропности кристаллических тел, О. Браве предположил, что элементарные частицы, слагающие кристалл,

по параллельным направлениям должны располагаться одинаково, а по непараллельным — различно. Представив себе такое расположение частиц в пространстве, мы и получим пространственную решетку в виде бесконечной протяженной параллелепипедальной системы точек.

Принимая во внимание геометрические разновидности возможных решетчатых систем, О. Браве вывел 14 типов пространственных решеток, носящих ныне его имя. Он был убежден, что ему удалось найти вообще все возможные типы реальных кристаллических структур. Однако сейчас известно, что решетки О. Браве отвечают лишь совокупностям чистых трансляций, входящим в качестве подгрупп в общую симметрию структур. В реальных кристаллических структурах трансляции связывают между собой только однородные и параллельно ориентированные элементарные частицы. Несмотря на это ограничение, теория решетчатого строения кристаллов по О. Браве занимает почетное место в истории кристаллографии и вместе с тем играет существенную подсобную роль в деле расшифровки реальных кристаллических структур.

В современных формулах структурной симметрии по Герману-Могену на первом месте всегда стоит буквенное обозначение соответственной решетки О. Браве. Ученых прошлого поражала идеальная согласованность 14 решеток с семью кристаллографическими системами (сингониями), выведенными из опыта. Об этом свидетельствует характеристика достижений О. Браве, данная Е. С. Федоровым: «Первые результаты математической теории правильных систем точек есть в то же время и первый триумф человеческого ума в области изучения кристаллов, так как выводы, шедшие из глубины кабинета, совпали как раз с тем, что составляло результат обширного опыта, принявшего со временем колоссальные размеры. Перед строгими кабинетными выводами как бы преклонилась природа, и кристаллы расположились по тем системам, которые явились необходимым математическим выводом из понятия о правильных системах точек (пространственных решетках)» [1949].

Как уже отмечалось, работы И. Ф. Гесселя и О. Браве долгое время оставались вне кругозора кристаллографов и минералогов прошлого столетия. Не учитывались и труды математиков (например, К. Ф. Гаусса о числовых решетках и квадратичных формах, А. Ф. Мебиуса о классификации поверхностей, равенстве фигур и др.), имевшие прямое отношение к кристаллографии.

Ведущую роль в официально признанной в то время науке о кристаллах играла немецкая школа последователей Х. Вейса и Ф. Науманна. Пользуясь приемами аналитической геометрии, они характеризовали кристаллы с помощью специальных систем координатных осей. Учение о симметрии было им неизвестно.

Чисто эмпирически ученые этой школы устанавливали закономерные уменьшения граней при переходах от полногранных классов к половиногранным, четвертьгранным и т. д. В весьма несовершенной форме здесь смутно намечались закономерности кристаллографической симметрии. Использование координатных осей без учета симметрии кристаллов привело к тому, что некоторые исследователи (Э. Митчерлих, К. Ф. Науманн, Н. И. Кокшаров) выделяли особую диклиноэдрическую систему, имевшую два косых угла и один прямой угол между координатными осями. Полная несостоятельность такой системы была впоследствии доказана А. В. Гадолиным.

Собранный к тому времени большой фактический материал по угловым величинам на кристаллах был совершенно оторван от обобщающих законов математической кристаллографии.

Лишь в 1867 г. наш соотечественник, крупный военный специалист, профессор артиллерийского училища и академик А. В. Гадолин (1828—1898), не подозревая о трудах И. Ф. Гесселя и О. Браве, снова взялся за

вывод законов симметрии. Будучи любителем и знатоком минералов, он обратил все свое внимание на симметрию кристаллов. В его классическом труде «Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала» раз и навсегда было установлено наличие 32 видов конечной кристаллографической симметрии. Простой и изящный вывод А. В. Гадолина, иллюстрированный многочисленными примерами из мира минералов, привлек внимание кристаллографов и минералогов. К концу прошлого столетия он занял первенствующее место в теоретической кристаллографии, навсегда вытеснив формальные схемы К. Ф. Науманна. В 1887 г. математик Б. Миннигероде показал, что виды конечной симметрии являются точечными группами симметрии (при всех симметрических преобразованиях одна из точек этой системы остается здесь неподвижной), и дал новый вывод видов симметрии, исходя из теории групп.

Дальнейший шаг в области математической кристаллографии сделал Л. Зонке (1842—1898). Согласно Л. Зонке [1879], «кристалл является бесконечной правильной системой точек, в которой вокруг каждой элементарной частицы расположение остальных частиц совершенно такое же, как и вокруг любой другой элементарной частицы». Для описания симметрии таких бесконечных систем пришлось ввести понятие о новых элементах бесконечной симметрии — винтовых осях. В своих выводах Л. Зонке исходил из «групп движения» К. Жордана (1869). В связи с этим он принимал во внимание лишь действие простых и винтовых осей симметрии, отбросив оси сложной симметрии, в том числе и центры и плоскости симметрии (плоскости скользящего отражения тогда еще не были известны). В результате такого подхода Л. Зонке вывел 65 пространственных групп симметрии первого рода, не допускающих операций с отражениями.

Окончательно вывод всех 230 пространственных групп с учетом элементов симметрии как первого (простые и винтовые оси), так и второго рода (инверсионные оси, плоскости скользящего отражения) завершен Е. С. Федоровым (1890) и А. Шенфлисом (1891).

Великий русский кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853—1919) по складу своего ума был ярко выраженным геометром. Красной нитью через всю его жизнь проходит страстное увлечение геометрией. Недаром среди его колоссального научно-литературного наследия, содержащего свыше 500 печатных трудов, на втором месте после кристаллографии (200 работ) стоит геометрия (около 140 работ).

Несмотря на всю многогранность, труды Е. С. Федорова по кристаллографии, минералогии, петрографии, химии, горному делу отражают один общий принцип: «Человек . . . доходит до высшего положения — решения стоящих перед ним вопросов путем математического анализа» [1915]. Особенно четко проведен этот принцип в работах Федорова по кристаллографии. Резкой критике подвергает он формальную школу немецких кристаллографов и их последователей. Взамен находимых на ощупь закономерностей он кладет в основу науки о кристаллах единый строго геометрический базис: «Эта наука требует от своих приверженцев полной строгости в логических заключениях и не допускает ни малейшей произвольности и субъективности. Работать в области кристаллографии, не будучи геометром, невозможно» [1901].

Характерно одно из самых первых выступлений юного Е. С. Федорова на заседании Минералогического общества в 1883 г. В протоколе этого заседания записано: «Действительный член, горный инженер Е. С. Федоров, бросив общий взгляд на предшествующую историю минералогии, из которого выходит, что до сих пор предметом исследования в этой области было главным образом лишь становившееся все более и более точным описание минералов; этот формальный период науки уже завершился, и теперь усилия ученых обращаются к выяснению действующих причин, для чего потребовалась выработка более отвлеченных понятий и содей-

ствие математики. Есть даже отделы последней, которые специально разрабатывались для целей минералогии (например, тетраэдрометрия Юнгханна). Референт желает указать теперь на значение другой области математики для минералогии, а именно теории проективности, составляющей важный отдел так называемой Новой Геометрии, предмета, бывшего до сих пор предметом исследования чистых математиков» [1884].

Уместно напомнить, что интерес к Новой Геометрии проявился особенно ярко в серии позднейших работ Е. С. Федорова, относящихся к проективной геометрии и к учению о системах различных геометрических образов (свои выводы ученый применял практически для изображения кристаллических структур, характеристики химических многокомпонентных составов, решения горно-геометрических задач и др.).

Возвращаясь к ранним работам Е. С. Федорова, отметим, что уже в его первой крупной монографии «Начала учения о фигурах», законченной еще в бытность его студентом Горного института, широко проявились характерные черты его творчества.

Сам автор характеризовал свою первую книгу следующим образом: «Сочинение это не требует никаких предварительных сведений, кроме элементарной геометрии, и составляет, в сущности, ни что иное, как дополнительный курс этой науки, упускавшийся по странной нелогичности истории науки в течение столь многих столетий. В основе всего изложения лежит понятие об измерении телесного угла, совершенно аналогично тому, как выводы планиметрии имеют в основании понятия об измерении плоских углов. Кроме общих оснований учения о фигурах, здесь изложены начала учения о симметрии, о поясах, о выполнении плоскости и пространства равными фигурами и о многогранниках высшей степени. Сочинение это излагает, между прочим, все те части учения о фигурах, которые составляют основание современной кристаллографии и отсутствие которых делало из кристаллографии сборник геометрических истин, будто бы выводимых из опыта» [1897].

Позднее, отмечая значение своего труда в деле развития кристаллографии, Е. С. Федоров писал: «В результате явилась такая коренная переработка кристаллографии, после которой последняя стала наукой рациональной, математического характера, по точности метода могущей быть поставленной рядом с теоретической механикой. Это направление теоретической кристаллографии имело основанием учение о фигурах — часть геометрии, почти совершенно упущенную чистыми математиками, из которой кристаллографы уже успели собрать обильную жатву» [1897].

Современные кристаллографы считают год выхода в свет «Начал учения о фигурах» знаменательной датой в истории науки о кристаллах, датой зарождения современной теоретической кристаллографии. Уже в своей первой книге Е. С. Федоров отметил неполноту выводов Л. Зонке. В 1890 г. выходят в свет отдельные оттиски его классической работы «Симметрия правильных систем фигур», содержащей полный вывод 230 пространственных групп — совокупностей элементов симметрии для бесконечных правильных систем точек. Как известно, федоровские пространственные группы соответствуют тем единственно возможным геометрическим законам, по которым должны располагаться в пространстве элементарные частицы, слагающие кристаллические структуры. Вывод 230 групп, осуществленный за 22 года до первых расшифровок реальных структур с помощью рентгеноанализа, представляет замечательный пример научного предвидения, достойный стоять в одном ряду с гениальным предсказанием Д. И. Менделеева еще не открытых химических элементов.

Годом позже Е. С. Федорова немецкий математик А. Шенфлис (1853—1928) опубликовал свой вывод 230 пространственных групп. В своем сочинении и в письмах к Е. С. Федорову он отметил приоритет русского ученого в данном вопросе и указал, что часть допущенных им ранее оши-

бок была своевременно исправлена благодаря указаниям Евграфа Степановича.

Академик Н. В. Белов сравнивает выводы обоих ученых: «Сопоставление двух выводов — Е. С. Федорова и А. Шенфлиса — показывает принципиально различный подход к вопросу у обоих ученых: для А. Шенфлиса — это лишь частный интересный случай вошедшей тогда в моду теории групп, для Федорова — инструмент изучения правильных систем фигур, к которым сводится сущность кристалла» [1959].

Триумф федоровских идей наступил в 1913 г., когда появились первые расшифровки реальных кристаллических структур, выполненные с помощью рентгеновских лучей. Ученому посчастливилось дожить до блестящего подтверждения своих гениальных теоретических выводов.

В настоящее время федоровские группы составляют математическую первооснову современного рентгеноанализа кристаллов. Любая кристаллическая структура должна обязательно подчиняться одной из 230 федоровских групп.

Заканчивая краткий обзор научного наследия Е. С. Федорова в области математической кристаллографии, приведем отрывок из статьи известного советского математика Б. Н. Делоне: «Новизна и важность тех вопросов, которые поставил частично и решил Федоров в геометрии, заставляет признать его одним из выдающихся геометров мира. Кому из геометров посчастливилось сделать такое открытие, как вывод 230 групп, которые будут всегда нужны всем, кто будет заниматься структурой твердого вещества, и для которых достижения Стенона, Гаюи, Гадолина, Браве, Зонке являются как бы предисловием? Традиции приписывают Платону открытие пяти правильных выпуклых многогранников, Архимеду — 13 выпуклых полуправильных многогранников, Кеплеру и Пуансо — 4 правильных невыпуклых многогранников, а Федоров нашел пять параллелоэдров. Во втором издании Большой советской энциклопедии имеются прекрасные таблицы важнейших многогранников — тел Платона, Архимеда, Кеплера и Пуансо и тел Федорова . . . В нашей стране мы имели двух геометров мирового значения — Лобачевского и Федорова, причем справедливо напомнить, что первый делит свою славу с венгерцем Бояи, а второй — с немецким математиком Шенфлисом» [1956].

Таким образом, Е. С. Федоров идеально сочетал в себе гениального кристаллографа и замечательного математика — подлинного представителя математической кристаллографии.

Для дальнейшего развития учения о симметрии существенное значение имели работы Г. В. Вульфа (1863—1925), выявившие преобладающее значение плоскости симметрии по сравнению с другими элементами симметрии (плоскость симметрии — основной элемент симметрии). Исходя из этого положения, А. К. Болдырев в монографии «Основы геометрического учения о симметрии» (1907) дал непогрешимо строгий вывод всех возможных элементов симметрии, заменяющих комбинации четырех, трех, двух и одной зеркальных плоскостей. Этот метод был развит и упрощен в Курсе кристаллографии В. В. Доливо-Добровольского (1937). Уже в наши дни идея Г. В. Вульфа была положена в основу «классного метода вывода пространственных групп симметрии» Н. В. Белова (1951).

Установление в 1912 г. дифракции рентгеновских лучей в кристаллах (М. Лауэ, В. Фридрихом, П. Книппингом) открыло путь к изучению реальных кристаллических структур. Годом позже появились первые расшифровки простейших структур, осуществленные В. Г. и В. Л. Брэггами. Затем началось бурное развитие рентгеноанализа кристаллов, лежащего в основе современной структурной кристаллографии.

Начиная с этого переломного момента, кристаллография все теснее примыкает к кругу физико-химических дисциплин и вместе с тем принимает характер вполне самостоятельной науки, базирующейся в основном

на математическом учении о симметрий. При этом отнюдь не порвались до конца и ее старинные связи с минералогией. Минералогические задачи, связанные с изучением кристаллов минералов, относятся сейчас к специальному разделу — минералогической кристаллографии.

По Н. В. Белову кристаллография лежит в центре треугольника, вершинами которого являются физика, химия, минералогия. И, вместе с тем, все разделы науки о кристаллах всецело базируются на математической кристаллографии.

В связи с перенесением центра тяжести кристаллографических исследований из области макросимметрии (изучение внешних кристаллических форм) в микросимметрию структур чрезвычайно возрос интерес к математической интерпретации последней. Как известно, 230 федоровских групп дали математическую основу для рентгеноструктурного анализа. Однако помимо этого требовалась подробная характеристика деталей бесконечных систем — плоских узоров, лент, стержней и т. д. Ряд зарубежных и советских исследователей (П. Ниггли, К. Германн, А. М. Гинзбург, А. В. Шубников) занялись разрешением этих вопросов. В разработку теоретической кристаллографии активно включились и математики.

В 1923 г. А. Шенфлис выпустил в переработанном и обновленном виде свою «Теорию кристаллической структуры». Вслед за А. В. Шубниковым (1940) Г. Вейль опубликовал популярную книгу «Симметрия» (1952). Советские геометры Б. Н. Делоне и А. Д. Александров создали «Математические основы структурного анализа кристаллов» (1934). С. А. Богомолов издал двухтомный «Вывод правильных систем по методу Федорова» (1932—1934).

Здесь нет возможности даже перечислить основные работы по математической кристаллографии за последние 50 лет. (В 1962 г. отмечалось полстолетия со дня открытия Лауэ.) Коснемся вкратце лишь важнейших в этой области достижений двух ведущих советских кристаллографов — А. В. Шубникова и Н. В. Белова, а также виднейшего нашего геометра Б. Н. Делоне.

Академику А. В. Шубникову принадлежит цикл теоретических работ по симметрии. Особое внимание им уделено симметрии континуума, в известной степени противопоставляемой симметрии дисконтинуума при изучении кристалла как среды.

В 1940 г. появилась широко известная популярная монография «Симметрия (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве)». Кристаллографические понятия о симметрии А. В. Шубников внедряет и в другие науки и прежде всего — в физику и химию.

В 1951 г. увидела свет его монография «Симметрия и антисимметрия конечных фигур», где дан новый толчок учению о симметрии путем введения понятия об антиравных фигурах. А. В. Шубников пишет: «Подобно тому как правая рука равна левой, так, по нашему предположению, положительная фигура может быть равна отрицательной. Этот вывод равенства назовем противоположным равенством или антиравенством» [1951]. По аналогии с симметричными фигурами, состоящими из равных частей, А. В. Шубников рассматривает антисимметричные фигуры, состоящие целиком или частично из антиравных частей. Вместо элементов симметрии появляются элементы антисимметрии. Для конечных кристаллографических фигур вывод совокупностей таких элементов привел к 58 видам антисимметрии. Эти новые понятия нашли реальное применение в структурном анализе кристаллов.

Н. В. Белов, математик А. М. Заморзаев и другие исследователи, развивая идеи А. В. Шубникова, вывели 1651 бесконечную шубниковскую группу симметрии и антисимметрии — аналоги 230 федоровских групп (фёдоровские группы являются частными группами шубниковских).

В 1960 г. А. В. Шубников, отступая от понятия классической симметрии, выдвинул новое учение о симметрии подобия. Операции симметрии подобия представляют своеобразные аналоги трансляций, поворотов вокруг осей, отражений в плоскостях и т. д., с той разницей, что такие операции связаны с одновременным увеличением или уменьшением масштаба подобных частей фигуры и расстояний между ними. Симметрия подобия ярко проявляется на природных телах в результате процессов роста.

Будучи профессором кристаллографии Московского университета А. В. Шубников стремился излагать свой курс для студентов физиков «на языке точных математических наук и тензорного исчисления» [1957].

Академик Н. В. Белов является главой кристаллоструктурного направления в СССР. Широкое признание получила его обобщенная теория плотнейших шаровых упаковок и координационных полиэдров, ставшая основой метода описания структур и их расшифровки. Разрабатывая методы расчета структур, Н. В. Белов развил метод суммирования рядов Фурье с помощью штрипсов, который лишь в самое последнее время начинает заменяться работой электронных математических машин. Большие успехи достигнуты школой Н. В. Белова и в развитии прямых методов, позволяющих выводить структуру непосредственно из экспериментальных данных. Выше уже упоминались новый классный вывод 230 федоровских групп и вывод 1651 шубниковской группы, осуществленные Н. В. Беловым. В последнее время он уделяет особое внимание многоцветной симметрии. В этой же области интенсивно работает геометр А. М. Заморзаев.

Чл.-корр. АН СССР Б. Н. Делоне — виднейший представитель математической кристаллографии в нашей стране. Ему принадлежит открытие 24 сортов решеток, зависящих от топологического строения области Дирихле — Вороного и расположения элементов симметрии. Найденная им связь между областями Дирихле — Вороного и приведением квадратичных форм по Зеллингу привела к выводу алгорифма для нахождения правильной установки кристалла. «Способ Делоне с его «тетраэдральным символом» получил распространение во всем мире» [1960].

В настоящее время, наряду со структурной кристаллографией, первенствующую роль начинает играть кристаллофизика. В этом разделе кристаллографии особенно важное место занимает тензорное описание физических свойств кристаллов.

Выращивание технически важных кристаллов стоит сейчас в центре внимания кристаллографов. Для успешного выполнения таких практически важных задач необходимо вникнуть в тончайшие детали кристаллогенезиса. В связи с этим усердно разрабатываются математические основы современной теории роста кристаллов. До сих пор мы имели подробнейшим образом разработанную геометрию идеально построенного кристалла. Практика сегодняшнего дня требует создания соответственной геометрии реального кристалла со всеми его дефектами и отклонениями от идеала. Возникают совершенно новые разделы математической кристаллографии, требующие небывалых приемов и оригинальных методов.

В заключение вернемся к федоровской кристаллографической школе Ленинградского горного института и коснемся тех ее работ, которые ждут дальнейшей математической обработки.

В 1925 г. академик Д. В. Наливкин выдвинул оригинальные понятия о криволинейной симметрии. Согласно его взглядам, прямолинейные и плоскостные элементы классической симметрии являются лишь частными случаями элементов криволинейной симметрии, соответствующих изогнутым плоскостям и осям. Криволинейная симметрия широко распространена в природе. Д. В. Наливкин отметил преобладающее ее значение в мире движущихся органических форм, однако, она проявляется и на объектах неживой природы, формирующихся в подвижных средах [1951]. Эти исключительно важные понятия настоятельно требуют детальной

математической разработки. Необходимо связать их характеристику с принципом симметрии П. Кюри, универсальное значение которого еще далеко не дошло до общего сознания

Значительно расширяет прежние понятия о симметрии новое учение о гомологии В. И. Михеева (1951, 1960).

Элементы гомологии отличаются от обычных элементов симметрии своим более общим характером: плоскость гомологии является плоскостью косого, а не прямого отражения. Ось гомологии представляет собой ось косого поворота вокруг прямой: любая точка системы движется по окружности или по эллипсу в плоскости, образующей в общем случае некоторый угол с осью. Симметрия представляет тот частный случай гомологии, когда обязательно равенство соответственных частей фигур.

Элементы гомологии ярко представлены на кристаллах. В то же время гомологичность форм играет большую роль и в органическом мире. В. И. Михеев рассматривает криволинейную симметрию Д. В. Наливкина, как частный случай гомологии. Учение о гомологии, имеющее большое практическое значение в кристаллографии, требует дальнейшего развития и расширения в область бесконечно протяженных систем.

Тесно связаны с математической кристаллографией вопросы точечных (вершинных) и линейных (реберных) форм кристаллов, проявление динамической и статической симметрии в природе, структурных разновидностей простых форм, ложной и собственной симметрии природных тел и т. д.

Точной математической характеристики требуют и сложнейшие округлые тела растворения с характерными конусами на поверхности. Такие тела найдены в природе (округлые алмазы) и экспериментально получены в лаборатории.

Разрешение этих сложных и чрезвычайно интересных проблем возможно лишь в тесном контакте математиков с кристаллографами.

ЛИТЕРАТУРА

Болдырев А. К. Схема научных работ Е. С. Федорова. Изв. Геогр. ин-та, вып. 2, 1921, стр. 133.

Белов Н. В. Е. С. Федоров (к 40-летию со дня смерти).

Бернштейн А. Ф. Моос во Фрейберге. Минерал. сб. Львовск. геолог. об-ва, 1955.

Борис Николаевич Делоне (к 70-летию со дня рождения). Кристаллография, т. 5, вып. 3, 1960, стр. 339—340.

Гаюи Р. Ж. Структура кристаллов. Избранные труды. Изд-во АН СССР, 1962, стр. 9.

Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр. Тр. Ин-та истории естествознания и техники, т. 10, 1956, стр. 12.

Ломоносов М. В. Полное собрание соч. Изд-во АН СССР, т. 5, 1954, стр. 599.

Наливкин Д. В. Криволинейная симметрия. Сб. Кристаллография. Металлургиздат, 1951.

Протоколы заседаний Спб минералогич. об-ва, 1884, ч. 19, стр. 216—217.

Федоров Е. С. О сочинениях немецкого минералога Гесселя. Зап. МО, ч. 27, 1891, стр. 462.

Федоров Е. С. Курс кристаллографии. Спб, 1897.

Федоров Е. С. Курс кристаллографии. Спб, 1901, стр. 2.

Федоров Е. С. Разум и инстинкт. Природа, июль — август, 1915, стр. 895.

Федоров Е. С. Симметрия и структура кристаллов. Изд-во АН СССР, 1949, стр. 111—112.

Шафрановский И. И. М. В. Ломоносов. Зап. ВМО, ч. 90, вып. 6, 1961, стр. 686.

Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. Изд-во АН СССР, 1951, стр. 7.

Шубников А. В. Кристаллография. Т. 2, вып. 1, 1957, стр. 8.

Bravais A. Études cristallgraphiquees. Paris, 1866, p. XXIII.

Hessel I. F. C. Kristallometrie. Leipzig, 1897, B. I, S. 36.

Sohncke L. Entwiekelung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig, 1879, S. 28.