Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. LI, вып. 1, 1966 г.

УДК 622.831

О ДИНАМИЧЕСКОМ МОДУЛЕ УПРУГОСТИ НЕКОТОРЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Л. С. Бурштейн

При расчете целиков, исследовании напряжений в массиве вокруг незакрепленных выработок и в других аналогичных задачах важное значение имеет установление величины модуля упругости горных пород. При испытании бетонов наряду с определением модуля упругости при статическом нагружении на обычных испытательных машинах в настоящее время широкое развитие получили акустические методы — импульсный и резонансный, позволяющие определять динамический модуль упругости. Импульсный метод заключается в измерении скорости распространения акустического сигнала. Им можно определять модуль упругости как в образце, так и в массиве. При резонансном методе обычно измеряется собственная частота изгибных колебаний образца.

Определение модуля упругости акустическим методом имеет самостоятельное значение для решения задач, связанных с различными динамическими воздействиями. Простота, надежность метода и особенно возможность определения модуля упругости в массиве позволяют результаты, получаемые этим методом, широко использовать для решения задач, связанных и со статическим нагружением.

Целью данной статьи является сопоставление результатов, получаемых акустическим методом с результатами при статическом нагружении и оценка импульсного и резонансного методов.

Рассмотрим резонансный метод определения модуля упругости путем измерения собственной частоты колебаний при изгибе. Для призматического бруса, испытывающего поперечные колебания, дифференциальное уравнение движения имеет вид [Пороцкий, Рущук, 1950]

$$\frac{\partial^2 y}{dt^2} + \frac{EI_z}{F\gamma}\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \qquad (1)$$

где y — прогиб элемента бруса при колебании в направлении оси y;
x — координата в направлении длины бруса;
t — время;
E — модуль нормальной упругости;
I_z — момент инерции сечения бруса относительно оси z;
g — ускорение силы тяжести;
F — площадь поперечного сечения бруса;
γ — вес единицы объема бруса.

Для бруса со свободными концами уравнение (1) можно привести к формуле

$$f = \frac{m^2}{2\pi b^2}\sqrt{\frac{EIg}{F\gamma}}, \qquad (2)$$

где f — частота собственных колебаний;

m — величина, зависящая от типа колебаний; для колебаний первого тона $m = 4{,}730$;

l — длина образца.

Из формулы (2) следует, что

$$E = \frac{4\pi^2 l^4 F\gamma}{m^4 I_z g}, \qquad (3)$$

для прямоугольного сечения

$$I = \frac{bh^3}{12},$$

где $\gamma F = p$ — вес образца;

b, h — ширина и высота сечения;

получаем

$$E = 0{,}965 \cdot 10^{-3} p \frac{f^2}{b}\left(\frac{l}{h}\right)^3. \qquad (4)$$

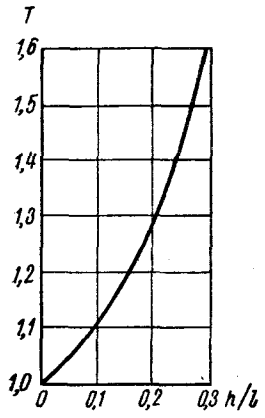


Рис. 1. Зависимость поправочного коэффициента T от $\frac{h}{l}$ для материала с коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}17$.

Формула (4) дает достаточно точные результаты при $\frac{h}{l} = 0{,}07$. При больших значениях $\frac{h}{l}$ она дает заниженные значения E, вследствие чего приходится вводить поправочный коэффициент T (рис. 1). Формула (4) в таком случае примет вид *

$$E = 0{,}965 \cdot 10^{-3} \frac{pf^2}{b}\left(\frac{h}{l}\right)^3 T. \qquad (4')$$

При импульсном методе выражение для динамического модуля упругости получается значительно проще. Скорость распространения сигнала в стержне, имеющем незначительные поперечные размеры, связана с модулем упругости стержня E и его плотностью ϱ известным акустическим законом

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}},$$

откуда

$$E = \varrho v^2. \qquad (5)$$

На рис. 2, *а* приведена блок-схема прибора для определения модуля упругости резонансным методом [Дурасов, Крылов, 1959]. Механические колебания в образце создаются возбудителем *1*, который питается от генератора *2* звуковой частоты и преобразует электрические колебания

* Надежнее при этом строить экспериментальную кривую для каждого материала отдельно. Для этого необходимо определить частоту собственных колебаний нескольких образцов с различными отношениями $\frac{h}{l}$ в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Если в одной плоскости $\frac{h}{l} \leqslant 0{,}07$, а в другой значительно больше, то по отношению частот можно установить поправку для данного $\frac{h}{l}$.

в механические. Механические колебания образца воспринимает звукоприемник *3* и преобразует их в электрические колебания. Эти колебания подаются на вход усилителя *4* и, после усиления, — на элементы вертикальной развертки электронно-лучевой трубки (индикатора). При возникновении колебаний в образце луч электронно-лучевой трубки создает на экране светящуюся вертикальную линию, длина которой пропорциональна величине напряжения, снимаемого с приемника механических колебаний.

В момент резонанса амплитуда механических колебаний образца достигает наибольшей величины. Следовательно, длина вертикальной светящейся линии на экране трубки будет наибольшей при совпадении частоты собственных колебаний образца *5* с частотой генератора. Таким образом, по максимальному отклонению луча можно зафиксировать момент совпадения частоты генератора с частотой собственных колебаний образца.

На рис. 2, *б*, приведена обобщенная схема прибора для определения динамического модуля упругости при импульсном методе путем измерения скорости распространения акустического сигнала. Излучатель *1* посылает в испытуемый образец *2* породы короткий акустический сигнал. В приемнике колебаний *3* механические колебания преобразуются в колебания электрического напряжения. Время с момента начала посылки сигнала до момента достижения им звукоприемника определяется микросекундомером *4*. Зная длину образца и время, прошедшее между посылкой и приемом сигнала через образец, можно вычислить скорость звука $v = \frac{l}{t}$. Подставляя значение v и ϱ в формулу (5), можно найти модуль упругости.

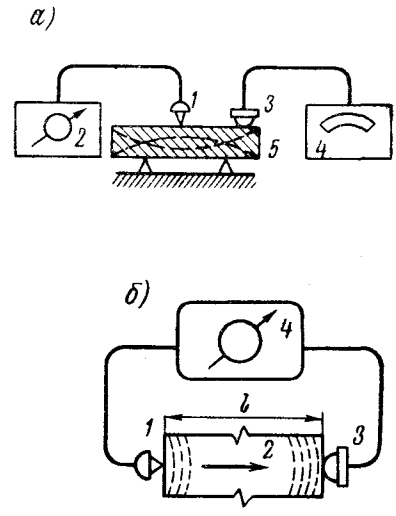


Рис. 2. Обобщенная схема испытаний образца: *а* — при изгибных колебаниях; *б* — методом ультразвука.

При резонансном методе необходимы образцы определенной формы, что возможно только в лабораторных условиях. Импульсный метод, в отличие от резонансного, позволяет определить модуль упругости и в образце, и в массиве. Результаты, получаемые по обоим методам, не совпадают. В табл. 1, где приведены сравнительные данные по этим методам, указаны номинальные размеры образцов, испытанных резонансным методом при изгибных колебаниях. Так как формула (5) справедлива для стержня с незначительными поперечными размерами, то для испытаний импульсным методом указанные образцы были разрезаны вдоль так, что поперечное сечение принимало форму квадрата.

Как видно из табл. 1, во всех случаях модуль упругости, определенный импульсным методом $E_{зв}$, выше, чем резонансным $E_{рез}$. Для «змеевика» отношение $E_{зв}/E_{рез}$ для различных партий образцов изменяется от 1,15 до 1,27. Для мрамора оно почти постоянно, для песчаников — колеблется от 1,13 до 1,24. Это различие обусловлено различным характером деформации пород при импульсных и вибрационных испытаниях. При импульсных испытаниях измеряется скорость акустического сигнала, который при своем распространении вызывает в породе деформацию

Таблица 1

Модуль упругости по резонансному и импульсному методам

Порода	Число образцов	Размер образца, *мм*	$E_{рез}$ 10^3 *кГ/см²*	Коэффициент вариации, %	$E_{зв}$ 10^3 *кГ/см²*	Коэффициент вариации, %	$\frac{E_{зв}}{E_{рез}}$
Змеевик	14	12×30×132	606	15,9	774	10,2	1,27
Змеевик	18	10×22×150	631	10,8	740	1,6	1,15
Мрамор А	14	10×25×110	715	6,4	895	11,6	1,24
Мрамор А	15	12×30×132	713	5,6	872	5,95	1,24
Мрамор Б	7	10×22×150	529	11,2	656	9,2	1,19
Мрамор Б	13	16×40×172	560	13,3	665	9,2	1,19
Песчаник мелкозернистый . .	5	20×20×130	214	5,3	241	3,74	1,13
Песчаник крупнозернистый	8	20×20×136	185	3,9	231	3,23	1,24
Гранит	5	18×20×150	715	7,45	936	1,10	1,31

сжатия — растяжения. Скорость этих деформаций так высока, что вязкие свойства породы не успевают проявиться. При вибрационных испытаниях, когда измеряется частота собственных изгибных колебаний образцов, в породе возникают изгибные деформации, которые представляют собой комбинацию деформаций сжатия, растяжения и сдвига. Скорость этих деформаций по сравнению с импульсными испытаниями значительно меньше и упругие несовершенства породы успевают проявиться в бóльшей степени.

Значение динамического модуля упругости остается постоянным и в том случае, когда исследуемая порода находится под напряжением от статической нагрузки при неизменности структуры. Многочисленные опыты с бетоном показали постоянство $E_{дин}$ при нагрузках, достигающих 50—70% от предела прочности при сжатии. При более высоких нагрузках начинается внутреннее трещинообразование, что сопровождается уменьшением скорости распространения звука или ультразвука и, следовательно, понижением величины модуля упругости. Идеальный образец должен иметь одну резонансную частоту. Трещиноватый образец резонирует при нескольких частотах с примерно одинаковой амплитудой. Наличие двух или более резонансов рассматривается как признак того, что образец не свободен от трещин.

При уменьшении влажности твердых горных пород динамический модуль упругости увеличивается вследствие возрастания сил сцепления между отдельными частицами породы.

Как видно из табл. 2, при повышении влажности песчаника на 3% динамический модуль понижается примерно вдвое. В абсолютно сухом

Таблица 2

Динамический модуль упругости по резонансному методу

Порода	Размер образца, *мм*	Относительная влажность, %	$E \cdot 10^3$ *кГ/см²*	
			до увлажнения	после увлажнения
Песчаник глинистый	20×20×133	3,1	76	37,7
	21×21×133	2,9	61,5	30,8
	20×20×133	2,25	68,3	41,2
	19×19×133	2,85	66,3	31,0
Песчаник крупнозернистый	20×20×136	3,0	179,0	93,0

состоянии динамический модуль упругости выше, чем в воздушно-сухом состоянии. По данным Р. В. Калининой [1959] у абсолютно сухих песчаников и глин скорость распространения упругих волн возрастает на 10—20% по сравнению со скоростью в воздушно-сухих породах, т. е. модуль упругости увеличивается на 20—40%. Таким образом, динамический модуль упругости песчаников — фактор весьма чувствительный к изменению влажности.

В табл. 3 сопоставлены с динамическим модулем средние значения статистического модуля для трехкратного нагружения при предельном напряжении в 30—35% от разрушающего.

Таблица 3

Сравнение динамического и статического модулей упругости

Порода	Число образцов	Размер образца, *мм*	$E_{дин}$ 10^3 *кГ/см²*	$E_{ст}$ 10^3 *кГ/см²*		$\frac{E_{дин}}{E_{ст}}$
				растяжение	сжатие	
Песчаник глинистый . . .	10	20×20×133	65,37	44,8	48,6	1,45—1,33
Песчаник крупнозернистый	8	20×20×136	185	130	—	1,42
Аргиллит	4	20×20×130	205,5	172,9	—	1,18
Песчаник мелкозернистый	7	20×20×122	214		172	1,24
Уголь	7	20×20×122	29,15		27,7	1,05
Гранодиорит	4	20×20×135	649	548	—	1,18

Примечание. Динамический модуль получен резонансным методом при изгибных колебаниях, статический—при испытаниях на сжатие или растяжение.

Отношение $E_{дин}/E_{ст}$ для разных пород колеблется от 1,05 до 1,33 относительно модуля при сжатии и от 1,18 до 1,45 — при растяжении. Во всех случаях это отношение больше единицы. Данные по импульсному методу показывают еще большее расхождение, поскольку определенный этим методом модуль больше, чем резонансным.

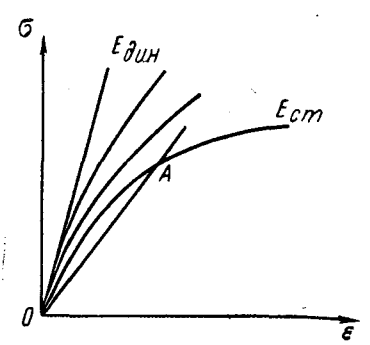


Рис. 3. Диаграмма деформаций σ — ε.

Рассмотрим причины, обусловливающие такое явление. При определении модуля упругости динамическим методом процесс деформации носит знакопеременный характер, время действия напряжения одного знака измеряется долями секунды, а максимальные значения возникающих напряжений измеряются долями граммов на квадратный сантиметр. Для упруго-вязкого или упруго-пластичного материала (например песчаника) $E_{ст}$ изменяется в зависимости от величины нагрузки. При относительно малых нагрузках и увеличении скорости их приложения кривые изменения деформаций на диаграмме напряжение — деформация (рис. 3) выпрямляются. Значения модулей упругости при различных скоростях загружения располагаются между двумя пределами: верхним — для очень быстрых нагрузок и нижним — для очень медленных нагрузок. Как уже отмечалось, данные измерения динамического модуля упругости соответствуют очень быстрым нагрузкам и отождествляются с максимальным значением постоянного для данного тела модуля упругости.

Кривые деформации большинства горных пород не имеют прямого участка, а изгибаются от самого начала координат. Если точку A (см. рис. 3), соответствующую определенному усилию, соединить прямой

с началом координат, то получим угол наклона, характеризующий коэффициент деформации, часто используемый на практике. Это, так называемое определение коэффициента деформации по секущей. Такой коэффициент всегда ниже динамического модуля упругости и имеет строго определенное значение только при усилии, при котором определяется модуль упругости. Таким образом, графически динамический модуль упругости можно определить как касательную к началу кривой напряжение — деформация при большой скорости приложенных очень малых нагрузок.

К числу факторов, влияющих на форму кривой деформации при статических испытаниях и обусловливающих поэтому различие между динамическим и статическим модулями упругости горных пород, относится влияние упругого последействия, начальных напряжений, а также влияние пористости и трещиноватости.

Влияние упругого последействия вызывает зависимость модуля упругости от длительности действия нагрузки. Вследствие этого $E_{ст}$, определенный при медленных испытаниях, меньше $E_{дин}$.

При определении модуля упругости резонансным методом или по скорости прохождения звука возникающие напряжения настолько малы, что говорить о ползучести не приходится. Ползучесть в горных породах при обычных статических испытаниях существует при всех напряжениях. Нет предела, ниже которого текучесть не наблюдается. Ползучесть горных пород не похожа на пластическую деформацию, обусловленную скольжением кристаллографических поверхностей металлов при нагружении выше предела текучести. Упругая ползучесть, возникающая при нагружении, уменьшается по мере увеличения скорости нагружения.

Действительная величина упругой ползучести при приложении нагрузки с обычной скоростью в опытах с песчаником и гранитом (табл. 4) получена А. Эвансом [1958].

Таблица 4

Порода	Песчаник мелкозернистый	Гранит
Напряжение, $кГ/см^2$	235	290
Упругая ползучесть, %	39,5	15

Резкое изменение модуля деформаций в диапазоне напряжений около нуля связано с наличием начальных напряжений. Такие материалы, как песчаник, мрамор, сланец и гранит, подвергаются начальным напряжениям при добыче, распиловке и обработке образцов. Если материал состоит из упругих элементов различной жесткости, частично сжатых и частично растянутых, то при осевом сжатии и малых напряжениях модуль упругости будет повышаться, так как растянутые элементы при повышении напряжений переходят в сжатые. При больших нагрузках влияние начальных напряжений невелико и поэтому $E_{ст}$ приближается к $E_{дин}$.

Выводы

1. При импульсном методе испытаний значения модуля упругости более высокие, чем при резонансном. Для песчаников эта разница составляет 10—13%, а для змеевика достигает 27%.

2. Резонансный метод определения модуля упругости при изгибных колебаниях весьма чувствителен к изменению влажности. Сравнительно

небольшое увеличение влажности приводит к резкому уменьшению динамического модуля упругости.

3. Для всех горных пород динамический модуль упругости выше статического. Резонансный метод дает меньшее расхождение между $E_{дин}$ и $E_{ст}$, чем импульсный.

4. Отношение $E_{дин}/E_{ст}$ колеблется от 1,05 до 1,33 относительно статического модуля при сжатии и от 1,18 до 1,45 при растяжении. Значительное расхождение между модулями объясняется различным характером испытаний, при которых производится определение.

ЛИТЕРАТУРА

Пороцкий Е. М. и Рущук Г. М. Определение качества цемента и бетона по динамическому модулю. Цемент, № 1, 1950.

Дурасов А. С. и Крылов Н. А. Физические методы контроля качества бетона. Госстройиздат, 1959.

Калинина Р. В. Некоторые экспериментальные данные о влиянии влажности на скорость распространения ультразвуковых волн в образцах пород. Разведочная и промысловая геофизика, № 27, 1959.

Evans A. Conference on Mechanical Properties of non Metalic Brittle Materials. London, 1958.