Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. LI, вып. 1, 1966 г.

УДК 622.838.53

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕЖДУКАМЕРНЫХ ЦЕЛИКАХ

А. А. Борисов, Б. И. Нифонтов, Н. М. Ромадин

В практике строительства и эксплуатации рудников, шахт и подземных сооружений одной из актуальных задач является расчет целиков. Ее решение затруднено многообразием типов целиков и условий их работы.

Характер работы междукамерных целиков зависит от ряда параметров, главнейшими из которых, при прочих равных условиях, являются: структура целиков, свойства слагающих их пород, глубина работ, тип связей целиков с вмещающими породами, соотношение размеров целиков и т. д.

По структуре целики следует делить на однородные, слоистые, составные (состоящие из отдельных частей, ориентированных по направлению действия нагрузки) и сложные. Основными типами связей целиков с породами кровли и почвы являются: полное сцепление, сухое трение, связь через пластичные прослойки и др. Учет всех этих параметров крайне сложен, и создание расчета междукамерных целиков в общем виде представляет большие трудности. Поэтому почти во всех существующих методах расчета междукамерных целиков решается узкая задача — рассматриваются однородные целики при сухих контактных поверхностях или полном сцеплении с почвой и кровлей.

Существующие методы расчета междукамерных целиков (Л. Д. Шевякова, В. Д. Слесарева, П. М. Цымбаревича, К. В. Руппенейта и др.) являются решениями плоской, а не объемной задачи, что вносит существенные искажения и допустимо лишь в частных случаях. Кроме того, ни одним из современных методов в принципе нельзя определить ни величину, ни характер распределения напряжений, действующих в целиках.

Возможности экспериментальных методов исследования напряженного состояния целиков (моделирования) ограничены воспроизведением конкретных натурных условий.

В основу аналитического исследования целиков, имеющих форму стен или столбов прямоугольного сечения, вполне допустимо положить задачу теории упругости о равновесии параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях, так как для многих рудников при однородных целиках, соответствующей глубине работ и длительном сроке службы целики должны иметь достаточный запас прочности и работать в упругой стадии. Эта задача достаточно близко отражает многие реальные случаи и является не только более простой, но и основной — она открывает путь для решения задач, отражающих более сложные условия работы целиков.

Задача о равновесии параллелепипеда впервые была поставлена Ляме в 1852 г.

Однако подходы к ее решению были разработаны только в последнее время отечественными учеными Калманком [1951], Кононенко [1954], Филоненко-Бородичем [1951] и др. Эти авторы не предлагали использовать задачу Ляме для расчета целиков вообще (в том числе и междукамерных), но некоторые из них разработали методы ее решения применительно к испытанию на сжатие образцов металлов или строительных материалов.

Наибольший практический интерес для решения рассматриваемой задачи представляют работы М. М. Филоненко-Бородича [1951]. Используя вариационный принцип Кастильяно и приближенный метод Папковича [1939], он показал, что в ряде случаев, когда на поверхности упругой призмы заданы нагрузки, нормальные или касательные к ее граням,

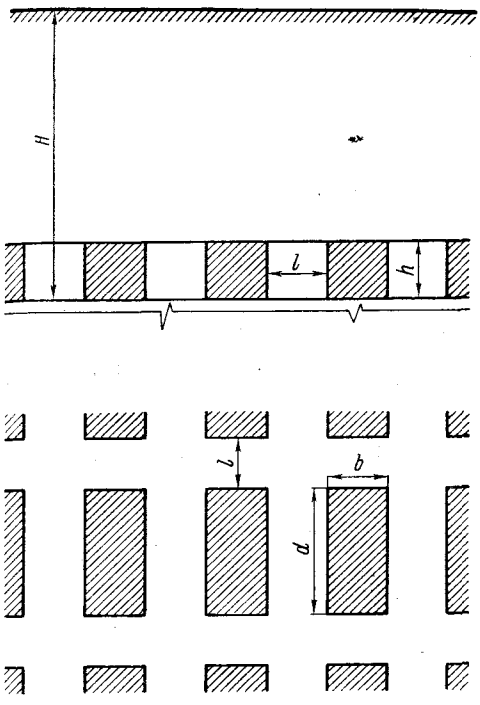


Рис. 1. Основная расчетная схема.

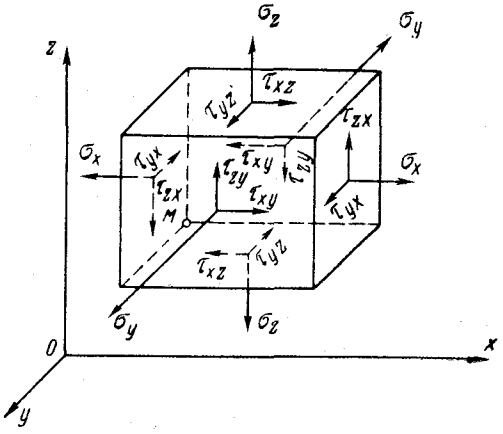


Рис. 2. Обозначение компонентов напряжений.

задача Ляме в принципе может быть доведена до численного решения.

Е. С. Кононенко [1954] на основе метода Филоненко-Бородича исследовал задачу о сжатии куба между жесткими плитами без скольжения. Использовав некоторые основные положения его решения, рассмотрим напряженное состояние целика с произвольным соотношением всех трех его размеров (параллелепипеда), сжатого нагрузкой P от веса налегающих пород при наличии полного сцепления по поверхности контакта целика с кровлей и почвой (рис. 1). При заданной ориентировке осей (рис. 2) компоненты тензора напряжений в первом приближении имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x = &-\frac{\pi^2}{h^2}\sin\frac{\pi z}{h}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)B+\\ &+\left(1+\sin\frac{\pi z}{h}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\frac{4\pi^2}{b^2}\cos\frac{2\pi y}{b}C;\\ \sigma_y = &-\frac{\pi^2}{h}\sin\frac{\pi z}{h}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)A+\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(1+\sin\frac{\pi z}{h}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)\frac{4\pi^2}{d^2}\cos\frac{2\pi x}{d}B;\\
\sigma_z=&\left(-\frac{z}{\pi}+\sin\frac{\pi z}{b}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)\frac{4\pi^2}{d^2}\cos\frac{2\pi y}{d}B+\\
&+\left(-\frac{z}{\pi}+\sin\frac{\pi z}{h}\right)\left(1-\cos\frac{z\pi x}{d}\right)\frac{4\pi}{b^2}\cos\frac{2\pi y}{b}A+\\
&+\frac{\pi+z}{\pi}\mu\left[\left(1-\cos\frac{2\pi y}{d}\right)\frac{4\pi^2}{b}\cos\frac{2\pi y}{b}+\right.\\
&\left.+\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)\frac{4\pi^2}{d^2}\cos\frac{2\pi y}{d}\right]C-\\
&-\frac{2\pi}{h}\mu\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)(A+B)+\frac{Ew_0}{h};\\
\tau_{xy}=&-\left(1-\sin\frac{\pi z}{h}\right)\frac{4\pi^2}{bd}\sin\frac{2\pi x}{d}\sin\frac{2\pi y}{b}C;\\
\tau_{yz}=&-\frac{\pi}{h}\cos\frac{\pi z}{h}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right)\frac{2\pi}{b}\sin\frac{2\pi y}{b}A;\\
\tau_{zx}=&-\frac{\pi}{h}\cos\frac{\pi z}{h}\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right)\frac{2\pi}{d}\sin\frac{2\pi x}{d}B,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения по граням элементарного параллелепипеда, мысленно вырезанного возле заданной точки (см. рис. 2);

τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} — касательные напряжения по граням элементарного параллелепипеда, мысленно вырезанного возле заданной точки (см. рис. 2);

x, y, z — координаты заданной точки;

h, b, d — соответственно высота, ширина и длина целика;

E — модуль упругости пород целика;

μ — коэффициент Пуассона;

w_0 — величина сжатия целика нагрузкой P;

A, B, C — произвольные постоянные,

$$A=\frac{A_0}{1000}Ew_0h;\quad B=\frac{B_0}{1000}Ew_0h;\quad C=\frac{C_0}{1000}Ew_0h; \qquad (2)$$

A_0, B_0, C_0 — табличные значения коэффициентов, зависящие от соотношения размеров целика и коэффициента Пуассона.

Величина сжатия целика

$$P=\int\int\sigma_z\,dx\,dy, \qquad (3)$$

откуда

$$w_0=\frac{Ph}{Edb}\cdot\frac{1}{1-2\pi\mu\,\frac{A_0+B_0}{1000}}. \qquad (4)$$

Коэффициенты A_0, B_0 и C_0 получены для широкого диапазона значений $\mu=0{,}05\div0{,}40$, $\frac{h}{b}=0{,}10\div3{,}00$ и $\frac{h}{d}=0{,}01\div1{,}00$ с помощью вычислительной машины «Урал» и протабулированы. Сокращенный вариант полученных нами таблиц для коэффициента Пуассона 0,25 приведен в таблице. Коэффициенты A_0, B_0 и C_0 рассчитаны на основе общих

Таблица

Значение A_0, B_0 и C_0 для целиков, сложенных породами с $\mu = 0{,}25$

$\frac{h}{b}$	Коэффициенты	Значение коэффициентов при $\frac{h}{d}$, равных					
		0,01	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,10	A_0	—21,31	—25,76	—24,64	—23,44	—22,61	—22,07
	B_0	—28,40	—20,14	—13,71	—8,94	—5,81	—3,85
	C_0	—220,91	46,09	12,49	5,68	3,23	2,09
0,50	A_0	—11,13	—10,99	—10,46	—9,89	—9,55	—9,38
	B_0	—25,48	—20,41	—12,92	—8,00	—5,04	—3,25
	C_0	8,88	6,26	2,93	1,48	0,93	0,66
1,00	A_0	—3,90	—3,71	—3,39	—3,13	—2,96	—2,86
	B_0	—23,29	—19,02	—12,08	—7,29	—4,50	—2,86
	C_0	2,23	1,74	0,95	0,46	0,22	0,12
2,00	A_0	—0,74	—0,67	—0,55	—0,46	—0,42	—0,40
	B_0	—22,25	—18,40	—11,89	—7,21	—4,43	—2,81
	C_0	0,56	0,46	0,28	0,16	0,09	0,05
3,00	A_0	—0,24	—0,20	—0,14	—0,10	—0,08	—0,07
	B_0	—22,05	—18,30	—11,91	—7,28	—4,50	—2,87
	C_0	0,25	0,21	0,13	0,08	0,05	0,03

решений, принятых для определения A, B и C, которые в свою очередь определяются на основании решения системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial A} = w_0 \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial A}\, dx dy,$$

$$\frac{\partial W}{\partial B} = w_0 \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial B}\, dx dy, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial C} = w_0 \iint \frac{\partial \sigma_z}{\partial C}\, dx dy,$$

где W — потенциальная энергия сжатия целика.

Дифференцированием уравнений (1) по параметрам A, B и C и последующим интегрированием найденных выражений (5) получим систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{9}{8}\pi^2 + 6(\pi^2-8)\frac{h^4}{b^4} + 3(8\mu+\pi^2)\frac{h^2}{b^2} - 9\mu^2\right] A + \\
&+\left[2(\pi^2-8)\frac{h^2}{b^2}\frac{h^2}{d^2} - \frac{9}{8}\pi^2\mu + \frac{3}{2}\mu(8-\pi^2)\left(\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{d^2}\right) - \right. \\
&\left. -9\mu^2\right] B + \left[\frac{3}{2}\pi(4+\pi)\left(\frac{h^2}{d^2} - \mu\frac{h^2}{b^2}\right) - \right. \\
&\left. -2\mu(\pi^2-8)\left(\frac{h^2}{b^2}\frac{h^2}{d^2} + 3\frac{h^4}{b^4}\right) - \right. \\
&\left. -6\mu^2(\pi+2)\left(\frac{h^2}{d^2}+\frac{h^2}{b^2}\right)\right] C = \frac{2\mu}{\pi} E w_0 h; \\
&\left[\frac{9}{8}\pi^2 + 6(\pi^2-8)\frac{h^4}{d^4} + 3(8\mu+\pi^2)\frac{h^2}{d^2} - 9\mu^2\right] B + \\
&+\left[2(\pi^2-8)\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{d^2} - \frac{9}{8}\pi^2\mu + \frac{3}{2}\mu(8-\pi^2)\left(\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{d^2}\right) - \right. \\
&\left. -9\mu^2\right] A + \left[\frac{3}{2}\pi(4+\pi)\left(\frac{h^2}{b^2} - \mu\frac{h^2}{d^2}\right) - \right. \\
&\left. -2\mu(\pi^2-8)\left(\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{d^2} + 3\frac{h^4}{d^4}\right) - 6\mu^2(\pi+2)\left(\frac{h^2}{d^2} + \right.\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{h^2}{b^2}\Big)\Big]C=-\frac{2\mu}{\pi}Ew_0h;\\
&\Big[\frac{3}{2}\pi(4+\pi)\Big(\frac{h^2}{d^2}-\mu\frac{h^2}{b^2}\Big)-2\mu(\pi^2-8)\Big(\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{d^2}+\\
&+3\frac{h^4}{b^4}\Big)-6\mu^2(\pi+2)\Big(\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{d^2}\Big)\Big]A+\\
&+\Big[\frac{3}{2}\pi(4+\pi)\Big(\frac{h^2}{d^2}-\mu\frac{h^2}{b^2}\Big)-2\mu(\pi^2-8)\Big(\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{d^2}+\\
&+3\frac{h^4}{d^4}\Big)-6\mu^2(\pi+2)\Big(\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{d^2}\Big)\Big]B+\\
&+\Big[2\pi(3\pi+8)\Big(3\frac{h^4}{d^4}+2\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{d^2}+3\frac{h^4}{b^4}\Big)-\\
&-4(\pi+2)^2\mu^2\Big(3\frac{h^4}{b^4}+2\frac{h^2}{b^2}\frac{h^2}{d^2}+3\frac{h^4}{d^4}\Big)\Big]C=0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Решение системы (6) носит общий характер, так как размеры параллелепипеда входят в эти уравнения в общем виде. Это позволяет рассматривать напряженное состояние целиков с различным соотношением размеров

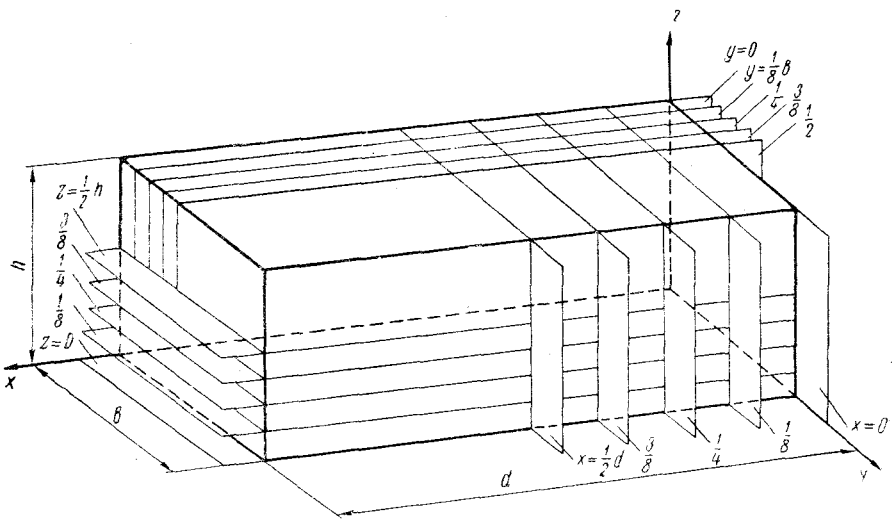


Рис. 3. Схема целика и расположение плоскостей, образующих сетку рассматриваемых точек.

сторон в плане и по высоте. Если же положить $h = b = d$, то получим частный случай, рассмотренный Е. С. Кононенко [1954] при испытании образцов на сжатие.

Напряжения можно рассчитать для любой заданной точки, но с учетом построения эпюр целесообразно принять схему расположения точек, образованных секущими плоскостями по рис. 3.

В качестве примера рассчитаем напряженное состояние конкретного целика для условий, характерных для ряда месторождений,

$$\frac{h}{b}=1{,}6;\quad \frac{h}{d}=0{,}31;\quad \gamma H=60\ кГ/см^2;\quad \sigma_{ср}=\frac{P}{bd}=129{,}3\ кГ/см^2;$$

$$E=7{,}26\cdot10^5\ кГ/см^2;\quad \mu=0{,}25.$$

Пространственная картина распределения вертикальных напряжений по контакту целика с кровлей, рассчитанная изложенным методом (рис. 5), наглядно позволяет судить о сложном характере напряженного состояния целика, которое невозможно описать с помощью решения плоских задач. На рис. 4 приведена более полная графическая характеристика напряженного состояния целика. Она включает все компоненты тензора напряжений и позволяет более полно оценить достоинства предлагаемого метода.

Основными факторами, определяющими характер напряженного состояния рассматриваемого типа целика, являются соотношения его геоме-

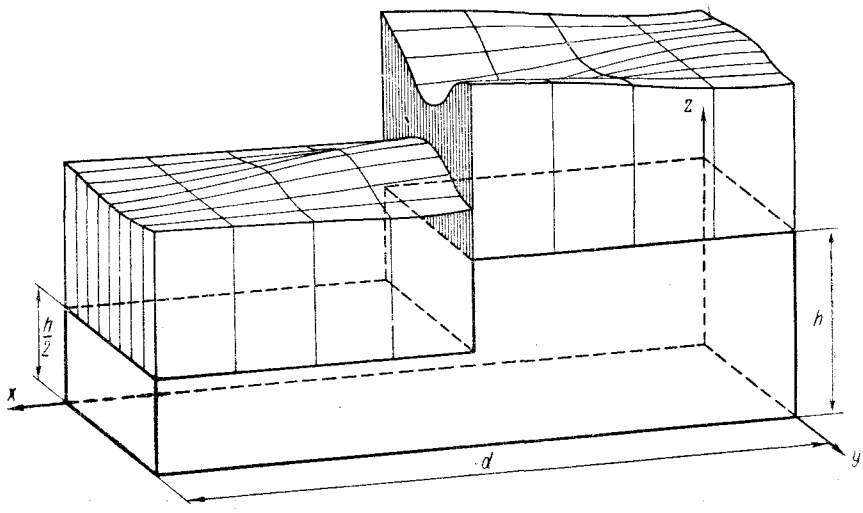


Рис. 5. Пространственная картина распределения вертикальных напряжений в плоскости $Z = h$ (плоскость контакта целика с кровлей) и $Z = \frac{1}{2} h$ (срединная плоскость).

трических размеров и коэффициент Пуассона. Модуль упругости пород целика и суммарная величина внешней нагрузки при заданных условиях на контакте целика с кровлей и почвой не сказываются на характере распределения напряжений. Они влияют лишь на абсолютную величину компонентов напряжения в данной точке, а не на их соотношение.

Как видно из рис. 5, предлагаемый метод отличается бесспорными преимуществами перед существующими. Действительно, для сечения достаточно удаленного от торцов целика картина распределения напряжений сходна с картиной, получаемой при решении плоских задач. Однако характер напряженного состояния по длине целика меняется. Решения же плоских задач в принципе не могут отражать закономерностей этого явления.

Объемные модели из оптически активных материалов также не дают возможности исследовать характер распределения напряжений по длине целика: при температуре «замораживания» напряжений коэффициент Пуассона материалов моделей становился равным 0,5, в то время как в действительности он для большинства горных пород меняется от 0,1 до 0,3, а его величина, как показано выше, существенно влияет на характер распределения напряжений.

Выводы

1. Предлагаемый расчетный метод исследования напряженного состояния целиков позволяет решать пространственные задачи и, следовательно, применим для расчета целиков с любыми соотношениями длины, ширины и высоты. Он позволяет при решении задачи варьировать показателями упругих свойств горных пород, не требует материальных затрат и оборудования, не является трудоемким, позволяет при необходимости вводить дополнительные условия на поверхности, несмотря на ряд допущений при постановке задачи. Результаты расчета этим методом согласуются с результатами конкретных экспериментальных и частных аналитических исследований и др.

2. Предлагаемый метод рекомендуется для расчета и исследования напряженного состояния однородных целиков, работающих в упругой стадии, при сухих контактах или полном сцеплении. Суммарную нагрузку на целик можно определить в зависимости от конкретных условий с использованием одной из существующих гипотез: полного веса пород, плиты, балки-стенки и др.

3. Предлагаемый метод позволяет осуществлять вполне обоснованный расчет междукамерных целиков для типовых условий не только многих рудников, но и подземных сооружений, резко снизить потери в междукамерных целиках, свести к минимуму случаи их аварийных разрушений; открывает возможности для решения других более сложных задач расчета целиков.

ЛИТЕРАТУРА

Калманок А. С. К теории испытаний на сжатие. Сб. Исследования по теории сооружений, вып. V, Стройиздат, 1951.

Кононенко Е. С. Задача о сжатии параллелепипеда между жесткими плитами без скольжения. Сб. Исследования по теории сооружений, вып. VI, Стройиздат, 1954.

Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1939.

Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. Прикл. матем. и механ., т. XV, вып. 2, 1951.