Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LVII, вып. 1, 1969 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ВБЛИЗИ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВЫРАБОТКИ С УЧЕТОМ НЕРОВНОСТЕЙ КОНТУРА И ПОЛЗУЧЕСТИ ПОРОД

А. Г. Протосеня, В. А. Ващилин

В данной работе рассматривается напряженное состояние упруго-ползучих горных пород вблизи закрепленной горной выработки с контуром, имеющим технологические неровности. При решении данной задачи используется напряженно-деформированное состояние вокруг незакрепленной горной выработки. Поэтому рассмотрим сначала решение этой задачи.

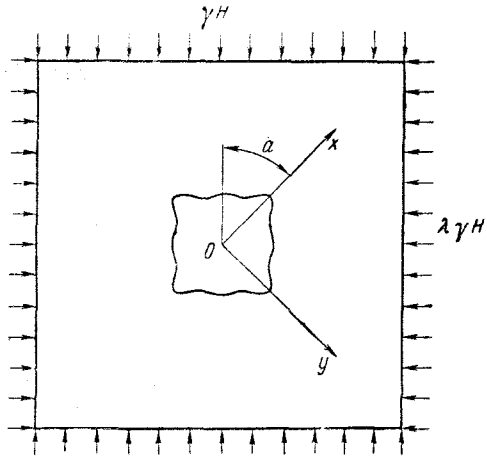


Рис. 1. Расчетная схема.

Пусть незакрепленная горная выработка круглого, квадратного, эллиптического, сводчатого или полигонального поперечного сечения заложена в однородном изотропном упруго-ползучем массиве горных пород, описываемом уравнением теории линейной наследственности. Полагая породный массив полубесконечным, а длину выработки по сравнению с размерами ее поперечного сечения великой, поставленную задачу можно рассматривать, как плоскую задачу теории ползучести.

Напряженно-деформированное состояние рассматривается, главным образом, вблизи контура выработки. При этом задача сводится к определению напряжений и перемещений в бесконечной плоскости с отверстием при сжимающих усилиях на бесконечности (рис. 1)

$$\sigma_x^{(\infty)}=\gamma H,\quad \sigma_y^{(\infty)}=\lambda\gamma H,\quad \tau_{xy}^{(\infty)}=0,$$

где H—глубина заложения выработки; γ—средний объемный вес горных пород; λ—коэффициент бокового распора.

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния вокруг горной выработки используется принцип разделения напряжений и перемещений на основные, существовавшие до проведения выработки, и дополнительные, возникшие после ее проведения.

Тогда решение задачи [3] сводится к построению функций $\varphi^0(z)$ и $\Psi^0(z)$ основного и $\varphi^*(z)$ и $\Psi^*(z)$ дополнительного полей

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi^0(z)+\varphi^*(z),\\ \Psi(z)&=\Psi^0(z)+\Psi^*(z).\end{aligned}\tag{1}$$

Соответственно условиям на бесконечности, функции основного поля имеют вид

$$\varphi^0(z)=\frac{\gamma H(1+\lambda)}{4}z,\quad \Psi^0(z)=-\frac{\gamma H(1-\lambda)e^{-2i\alpha}}{2}z,\tag{2}$$

где α—угол между осью x и напряжением на бесконечности $\sigma_x^{(\infty)}=\gamma H$.

Контур выработки [1] с достаточной степенью точности может быть описан кривой трохоидального типа

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{C_1}{\zeta^n}+\frac{C_2}{\zeta^m}\right),\tag{3}$$

где R, C_1, n—величины, определяющие соответственно размеры, очертание и форму проектного контура ($n=0$, $C_1=0$, проектный контур—окружность, $n=1$, $0<C_1<1$—эллипс, $n=2$, $C_1=0{,}1$—криволинейный треугольник (сводчатый контур), $n=3$, $C_1=1/9-1/10$—криволинейный квадрат, $n=4, 5, 6\ldots$, $0<C_1<\frac{1}{n}$—криволинейный многоугольник, соответствующий полигональному контуру); C_2—амплитуда возмущений в долях R; m—целое число возмущений без единицы.

Для нахождения функций дополнительных напряжений отобразим конформно внешность единичного круга на внешность трохоидальной кривой (3). Тогда

$$\varphi(\zeta)=\frac{\gamma H(1+\lambda)}{4}\omega(\zeta)+\varphi^*(\zeta),\tag{4}$$

$$\Psi(\zeta)=-\frac{\gamma H(1-\lambda)e^{-2i\alpha}}{2}\omega(\zeta)+\Psi^*(\zeta).\tag{5}$$

Неизвестные функции $\varphi^*(\zeta)$, $\Psi^*(\zeta)$ ищутся в виде

$$\varphi^*(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^{-n};\quad \Psi^*(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\zeta^{-n}.\tag{6}$$

Контурное условие незакрепленной горной выработки будет [3]

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\Psi(\sigma)}=0,\tag{7}$$

где σ—значение ζ на контуре единичной окружности λ_1; $\varphi(\sigma)$, $\omega(\sigma)$, $\Psi(\sigma)$—соответственно значения функции $\varphi(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ на контуре единичной окружности.

Подставив (4) и (5) в контурное условие (7) и умножая обе части полученного выражения и ему сопряженного на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, где ζ—точка

вне единичного круга λ_1, и интегрируя по λ_1, получим два функциональных уравнения

$$\varphi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{f_1^0+if_2^0}{\sigma-\zeta}d\sigma, \tag{8}$$

$$\Psi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi^{*\prime}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{f_1^0-if_2^0}{\sigma-\zeta}d\sigma, \tag{9}$$

где

$$f_1^0+if_2^0=-\left[\varphi^0(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi^{0\prime}(\sigma)}+\overline{\Psi^0(\sigma)}\right], \tag{10}$$

$$f_1^0-if_2^0=-\left[\overline{\varphi^0(\sigma)}+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi^{0\prime}(\sigma)+\Psi^0(\sigma)\right]. \tag{11}$$

Компоненты напряжений σ_θ, σ_ρ, $\tau_{\rho\theta}$ и перемещений v_θ, v_ρ в криволинейной ортогональной системе координат определяются по известным формулам [3]

$$\sigma_\rho+\sigma_\theta=4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta), \tag{12}$$

$$\sigma_\theta-\sigma_\rho+2i\tau_{\rho\theta}=\frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)+\Psi'(\zeta)\right], \tag{13}$$

$$v_\rho+iv_\theta=\frac{1}{2G}\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}\left[\chi\varphi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)}-\Psi(\zeta)\right], \tag{14}$$

где

$$\Phi(\zeta)=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)};$$

G—модуль сдвига; $\chi=3-4\nu$; ν—коэффициент Пуассона; σ_θ и σ_ρ—соответственно окружное и радиальное нормальные напряжения; $\tau_{\rho\theta}$—касательное напряжение.

Предположим, что вслед за мгновенно-упругими деформациями проявляются реологические свойства горных пород. Ю. Н. Работновым [4] показано, что если известно упруго-мгновенное решение, то для получения решения с учетом наследственности достаточно соответствующие упругие постоянные заменить временными операторами

$$\chi_t=\chi(1+\chi^*),\quad G_t=G(1-G^*), \tag{15}$$

где χ^*, G^*—временные интегральные операторы.

Для исследований реологических свойств горных пород в лаборатории Ленинградского горного института были поставлены опыты на ползучесть. Пробы горных пород отбирались из подготовительных выработок шахт, вмещающие породы которых сложены в основном песчаниками, глинистыми сланцами и алевролитами. Испытания проводились в условиях поперечного изгиба. При испытаниях соблюдались соотношения линейных размеров образцов для получения одномерного напряженного состояния (рис. 2).

Результаты испытаний обрабатывались на основе уравнения линейной наследственности

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left[\sigma(t)+\int_0^t K(t,\tau)\,\sigma(t)\,d\tau\right] \tag{16}$$

при степенном ядре ползучести

$$K(t,\tau)=\delta(t-\tau)^{-\alpha_1},$$

где δ, α_1—характеристики ползучести.

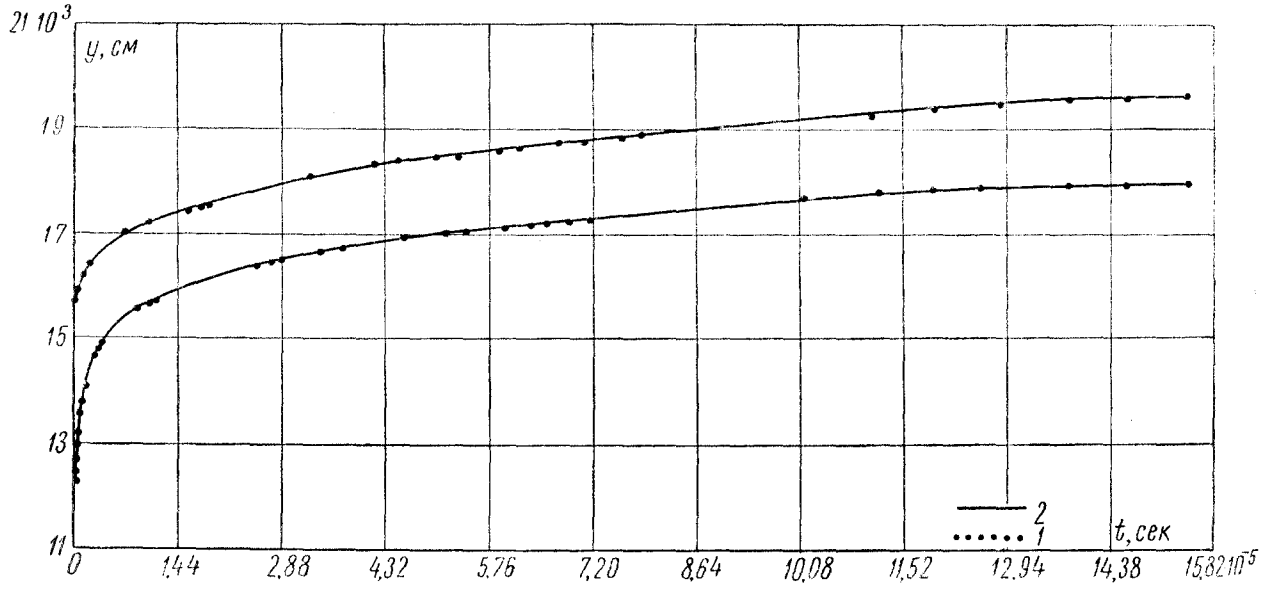


Рис. 2. Кривые ползучести песчаника:

1—опытные данные; *2*—при степенном ядре.

Заменяя в уравнении (14) χ, G временными операторами χ_t, G_t, а функции $\varphi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ через $\varphi^*(\zeta)$, $\Psi^*(\zeta)$, получим компоненты дополнительных перемещений с учетом ползучести

$$v_\rho^n + iv_\theta^n = \frac{1}{2G_t}\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}\left[\chi_t\varphi^*(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi^{*\prime}(\zeta)} - \overline{\Psi^*(\zeta)}\right]. \quad (17)$$

Компоненты дополнительных перемещений, обусловленные лишь ползучестью породы, найдем, вычитая из (17) компоненты упруго-мгновенных деформаций

$$v_\rho^n + iv_\theta^n = \frac{1}{2G_t}\frac{\overline{\zeta}}{\rho}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\left\{\chi_t - \frac{G_t}{G}(\chi)\varphi^*(\zeta) - \right.$$

$$\left. -\left(1-\frac{G_t}{G}\right)\left[\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\varphi^{*\prime}(\zeta)} + \overline{\Psi^*(\zeta)}\right]\right\}. \quad (18)$$

Внеся значение функций основных напряжений (2) в (10) и (11), получим

$$f_1^0 + if_2^0 = -\frac{\gamma HR}{2}\left[(1+\lambda)\left(\sigma + \frac{C_1}{\sigma^n} + \frac{C_2}{\sigma^m}\right) - \right.$$

$$\left. -(1-\lambda)e^{-2i\alpha}\left(\frac{1}{\sigma} + C_1\sigma^n + C_2\sigma^m\right)\right], \quad (19)$$

$$f_1^0 - if_2^0 = -\frac{\gamma HR}{2}\left[(1+\lambda)\left(\frac{1}{\sigma} + C_1\sigma^n + C_2\sigma^m\right) - (1-\lambda)e^{-2i\alpha}\left(\sigma + \frac{C_1}{\sigma^n} + \frac{C_2}{\sigma^m}\right)\right]. \quad (20)$$

Подставив (3), (6) и (19) в (8) и найдя контурные интегралы, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{\zeta^j} + \sum_{j=0}^{m-3}(j+1)\,\overline{\alpha}_{(j+1)}\sum_{K=0}^{K=\frac{m-j-3}{n+1}} a_{K(n+1)}\frac{1}{\zeta^{[m-j-2-K(n+1)]}} =$$

$$= -\frac{\gamma HR}{2}\left[(1+\lambda)\left(\frac{C_1}{\zeta^n} + \frac{C_2}{\zeta^m}\right) - \frac{(1-\lambda)e^{-2i\alpha}}{2}\frac{1}{\zeta}\right], \quad (21)$$

где

$$a_0 = -C_2,$$

$$a_{n+1} = (-1)^{(n+1)+1}(nC_1)C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{K(n+1)} = (-1)^{K(n+1)+1}(nC_1)^K C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m-n} = (-1)^{(m-n)+1}(nC_1)^{\frac{m-n}{n+1}}C_2 - C_1.$$

$$K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m-n}{n+1}.$$

Сравнивая в уравнении (21) коэффициенты при одинаковых степенях ζ, получим систему из m алгебраических уравнений. Отделяя мнимые и действительные части, разобьем ее на две самостоятельные неоднородные системы. Полученные системы имеют ненулевое решение, так как их определители не равны 0. Справедливость этого должна быть проверена при конкретных расчетах. Обозначим через A и B определители соответственно действительных и мнимых частей $m-2$

уравнений системы (21), а через A_j и B_j — определители, получающиеся из предыдущих заменой столбца j в матрице столбцом из свободных членов. Тогда коэффициенты имеют вид

$$\alpha_j=\frac{A_j}{A}+i\,\frac{B_j}{B}\;;\quad \alpha_m=-\frac{\gamma HR\,(1+\lambda)\,C_2}{2}\,. \tag{22}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-2.$$

Подставляя значение (22) полученных коэффициентов в первый ряд (6), найдем

$$\varphi^*(\zeta)=\sum_{j=1}^{m-2}\left(\frac{A_j}{A}+i\,\frac{B_j}{B}\right)\frac{1}{\zeta^j}-\frac{\gamma HR\,(1+\lambda)\,C_2}{2}\,\frac{1}{\zeta^m}\,. \tag{23}$$

Функцию $\Psi^*(\zeta)$ найдем, внеся (3), (6) и (20) в (9) и произведя вычисление контурных интегралов

$$\Psi^*(\zeta)=\sum_{j=1}^{m-2} j\left(\frac{A_j}{A}+i\,\frac{B_j}{B}\right)\left[\sum_{K=0}^{K=\frac{m-j-(n+1)}{n+1}} a_{K(n+1)}\zeta^{m-j-1-K(n+1)}-\right.$$

$$\left.-\zeta^{m-j-1}\,\frac{1+C_1\zeta^{n+1}+\zeta^{m+1}}{mC_2-nC_1\zeta^{m-n}-\zeta^{m+1}}\right]+$$

$$+\frac{\gamma HR\,(1+\lambda)}{2}\,\frac{1}{\zeta}\left[-1+\frac{mC_2\,(1+C_1\zeta^{n+1}+C_2\zeta^{m+1})}{mC_2-nC_1\zeta^{m-n}-\zeta^{m+1}}\right]+$$

$$+\frac{\gamma HR\,(1-\lambda)\,e^{-2i\alpha}}{2}\left(\frac{C_1}{\zeta^n}+\frac{C_2}{\zeta^m}\right). \tag{24}$$

Переходим к рассмотрению напряженно-деформированного состояния вокруг горной выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью, вступающей в совместную работу с окружающими породами в момент времени τ. Обозначим функции дополнительных напряжений для закрепленной выработки через $\varphi_t^*(\zeta)$, $\Psi_t^*(\zeta)$. Тогда дополнительные перемещения в произвольный момент времени после закрепления определятся

$$v_\rho^*+iv_\theta^*=\frac{1}{2G_t}\,\frac{\zeta}{\rho}\,\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|}\left[\varkappa_t\varphi_t^*(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\,\overline{\varphi_t^{*\prime}(\zeta)}-\overline{\Psi_t^*(\zeta)}\right]. \tag{25}$$

Условие совместной работы крепи и горных пород при их жестком сцеплении имеет вид

$$v_\rho^n+iv_\theta^n=(v_\rho^*+iv_\theta^*)\,|_t-(v_\rho^*+iv_\theta^*)\,|_\tau=0. \tag{26}$$

Из (26) с учетом (18), после сокращения на $\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\sigma}}{\rho}\,\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}$, получим

$$\varkappa_t\varphi_t^*(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi_t^{*\prime}(\sigma)}-\overline{\Psi_t^*(\sigma)}=g(t), \tag{27}$$

где

$$g(t)=\frac{G_t}{G_\tau}\left[\varkappa_\tau\varphi^*(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)}-\overline{\Psi^*(\sigma)}\right]. \tag{28}$$

Соотношения (27), (28) и их сопряженные

$$\gamma_t \overline{\varphi_t^*(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_t^{*\prime}(\sigma) - \Psi_t^*(\sigma) = \overline{g(t)}, \tag{29}$$

$$\overline{g(t)} = \frac{G_t}{G_\tau}\left[\gamma_\tau \overline{\varphi^*(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi^{*\prime}(\sigma) - \Psi^*(\sigma)\right] \tag{30}$$

служат для определения функций $\varphi_t^*(\zeta)$, $\Psi_t^*(\zeta)$.

Умножив (27), (29) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$, где ζ—точка вне единичного круга λ_1, и проинтегрировав по λ_1, получим

$$\gamma_t \varphi_t^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_t^{*\prime}(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1} \frac{g(t)}{\sigma-\zeta} d\sigma, \tag{31}$$

$$\Psi_t^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_t^{*\prime}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1} \frac{\overline{g(t)}}{\sigma-\zeta} d\sigma. \tag{32}$$

Функции $\varphi_t^*(\zeta)$, $\Psi_t^*(\zeta)$ ищутся в виде

$$\varphi_t^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\zeta^{-n}; \quad \Psi_t^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t)\zeta^{-n}. \tag{33}$$

Коэффициенты первого ряда (33) найдем, введя (3), (6), (28) и (33) в (27) и произведя вычисление контурных интегралов

$$\gamma_t \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(t)\frac{1}{\zeta^j} = \sum_{j=0}^{m-3} (j+1)\,\overline{\alpha_{(j+1)}}(t) \sum_{K=0}^{K=\frac{m-j-3}{n+1}} a_{K(n+1)} \frac{1}{\zeta^{m-j-2-K(n+1)}} +$$

$$+\frac{G_t}{G_\tau}\gamma_\tau\left[\sum_{j=1}^{m-2}\left(\frac{A_j}{A}+i\frac{B_j}{B}\right)\frac{1}{\zeta^j} - \frac{\gamma HR(1+\lambda)C_2}{2}\frac{1}{\zeta^m}\right] -$$

$$-\frac{G_t}{G_\tau}\sum_{j=0}^{m-3}(j+1)\left[\frac{A_{(j+1)}}{A}-i\frac{B_{(j+1)}}{B}\right]\sum_{K=0}^{K=\frac{m-j-3}{n+1}} a_{K(n+1)}\frac{1}{\zeta^{m-j-2-K(n+1)}}. \tag{34}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, получим систему из m уравнений. Система (34) аналогична системе (21). Тогда, опуская математические рассуждения, получим

$$\alpha_j(t) = \frac{A_j(t)}{A(t)} + i\frac{B_j(t)}{B(t)}; \quad \alpha_m = -\frac{G_t\gamma_\tau}{G_\tau\gamma_t}\frac{\gamma HR(1+\lambda)C_2}{2}, \tag{35}$$

где $A(t)$, $B(t)$—определители соответственно действительных и мнимых частей $m-2$ уравнений системы (34); $A_j(t)$, $B_j(t)$—определители, получающиеся из предыдущих заменой столбца j в матрице столбцом из свободных членов.

Вводя полученные коэффициенты (35) в первое из уравнений (34), имеем

$$\varphi_t^*(\zeta) = \sum_{j=1}^{m-2}\left[\frac{A_j(t)}{A(t)}+i\frac{B_j(t)}{B(t)}\right]\frac{1}{\zeta^j} - \frac{\gamma HR(1+\lambda)C_2}{2}\frac{G_t}{G_\tau}\frac{\gamma_\tau}{\gamma_t}\frac{1}{\zeta^m}. \tag{36}$$

Найдем второй контурный интеграл в уравнении (32)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{\overline{g(t)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma=\frac{G_t}{G_\zeta}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi^{*\prime}(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\Psi^*(\zeta)\right]=$$

$$=\frac{G_t}{G_\zeta}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1}\frac{f_1^0-if_2^0}{\sigma-\zeta}\,d\sigma\right]=-\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{\gamma HR}{2}\left[(1+\lambda)\frac{1}{\zeta}-\right.$$

$$\left.-(1-\lambda)\,e^{-2i\alpha}\left(\frac{C_1}{\zeta^n}+\frac{C_2}{\zeta^m}\right)\right]. \qquad (37)$$

Для получения функции $\Psi_t^*(\zeta)$ внесем (3), (36) и (37) в (32) и возьмем контурные интегралы

$$\Psi_t^*(\zeta)=\sum_{j=1}^{m-2} j\left[\frac{A_j(t)}{A(t)}+i\,\frac{B_j(t)}{B(t)}\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{K=0}^{K=\frac{m-j-(n+1)}{n+1}} a_{K(n+1)}\zeta^{m-j-K(n+1)}-\zeta^{m-j-1}\,\frac{1+C_1\zeta^{n+1}+C_2\zeta^{m+1}}{mC_2-nC_1\zeta^{m-n}-\zeta^{m+1}}\right]-$$

$$-\frac{\gamma HR(1+\lambda)\,mC_2}{2}\,\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_t}\,\frac{1+C_1\zeta^{n+1}+C_2\zeta^{m+1}}{mC_2-nC_1\zeta^{m-n}-\zeta^{m+1}}\,\frac{1}{\zeta}-$$

$$-\frac{\gamma HR}{2}\,\frac{G_t}{G_\zeta}\left[(1+\lambda)\,\frac{1}{\zeta}-(1-\lambda)\,e^{-2i\alpha}\left(\frac{C_1}{\zeta^n}+\frac{C_2}{\zeta^m}\right)\right]. \qquad (38)$$

Построенные функции (36) и (38) позволяют определить в произвольный момент времени компоненты напряжений вокруг горной выработки круглого, эллиптического, сводчатого, квадратного и полигонального поперечных сечений, закрепленной абсолютно жесткой крепью, при породном контуре, имеющем технологические неровности и ползучих породах. Применим полученные результаты для рассмотрения напряженного состояния вблизи шахтного ствола, закрепленного абсолютно жесткой крепью. Функции (36), (38) дополнительных напряжений имеют вид

$$\varphi_t^*(\zeta)=-\frac{\nu}{1-\nu}\,\gamma HRC_2\,\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_t}\,\frac{1}{\zeta^m}, \qquad (39)$$

$$\Psi_t^*(\zeta)=\frac{\nu}{1-\nu}\,\gamma HR\left[\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_t}\,mC_2\,\frac{1+C_2\zeta^{m+1}}{mC_2-\zeta^{m+1}}\,\frac{1}{\zeta}-\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{1}{\zeta}\right]. \qquad (40)$$

Функции основных напряжений

$$\varphi^0(\zeta)=\frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{\gamma HR}{2}\left(\zeta+\frac{C_2}{\zeta^m}\right);\quad \Psi^0(\zeta)=0. \qquad (41)$$

Основные и дополнительные напряжения получаются соответственно их функциям. Подставив (3), (39), (40) и (41) в (12) и (13) и отделив действительные и мнимые части, получим

$$\frac{\sigma_\theta^0}{\sigma_\rho^0}=\frac{\nu}{1-\nu}\,\gamma H, \qquad (42)$$

$$\frac{\sigma_\theta^*(t)}{\sigma_\rho^*(t)}=\frac{\nu}{1-\nu}\,\gamma H\,\frac{G_t}{G_\zeta}\,\frac{mC_2\cos(m+1)\,\theta-m^2C_2^2}{1-2mC_2\cos(m+1)\,\theta+m^2C_2^2}\times$$

$$\times\left(2\,\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_t}\pm\frac{\gamma_\zeta}{\gamma_t}\pm\frac{1-mC_2\cos(m+1)\,\theta}{mC_2\cos(m+1)\,\theta-m^2C_2^2}\right). \qquad (43)$$

При $m=0$, $C_2=0$ из (42) получаем известные формулы Ж. С. Ержанова для гладкого контура

$$\frac{\sigma_\theta^*(t)}{\sigma_\rho^*(t)} = \pm \frac{\nu}{1-\nu}\gamma H \frac{G_t}{G_\tau}. \qquad (44)$$

Временные интегральные операторы (15) при степенном ядре ползучести имеют вид [2]

$$G_t = G\exp\left[-\frac{3\omega_1\delta\Gamma(1-\alpha_1)}{2(1+\nu)}t^{1-\alpha_1}\right],$$

$$\gamma_t = 3-[2-2(1-2\nu)\exp[-\omega_1\delta\Gamma(1-\alpha_1)t^{1-\alpha_1}]], \qquad (45)$$

где $\omega_1=(1-\alpha_1)^{1-\alpha_1}$, $\Gamma(1-\alpha_1)$—гамма-функция.

Для простоты положим начало взаимодействия крепи и горного массива совпадающим с началом проявления свойств ползучести горных пород. В качестве горных пород взяты глинистый сланец и алевролит. Распределение напряжений рассматривается в моменты времени $t=0$, 120, 600 *ч*. $t=0$ соответствует упруго-мгновенному распределению напряжений, $t=600$—времени стабилизации ползучести глинистого сланца и алевролита.

Исходные данные для расчета: а) глинистый сланец $\nu=0{,}3$, $\delta=0{,}008$ *сек*$^{\alpha_1-1}$, $\alpha_1=0{,}71$, $m=11$, $C_2=0{,}05$; б) алевролит $\nu=0{,}2$, $\delta=0{,}0094$ *сек*$^{\alpha_1-1}$, $\alpha_1=0{,}726$, $m=7$, $C_2=0{,}0715$.

Результаты расчета распределения напряжений по контурам горных выработок *

Угловая координата, θ^*, *град*	Неровный контур					Гладкий контур				
	$\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H\sigma_\theta$			$\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H\sigma_\rho$		$\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H\sigma_\theta$			$\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H\sigma_\rho$	
	I	II	III	II	III	I	II	III	II	III
	Глинистый сланец									
0	6,9	4,02	3,39	0,64	0,87	2	1,42	1,32	0,58	0,68
15	0,58	0,75	0,78	0,492	0,575					
	Алевролит									
0	6	3,39	2,57	0,73	0,91	2	1,38	1,26	0,61	0,74
22,5	0,66	0,71	0,78	0,56	0,72					

* При t: I—0, II—120, III—600 *ч*.

Из таблицы видно, что наличие неровностей на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью, вызывает значительные возмущения в распределении напряжений. Напряжения в вершинах впадин больше, а в вершинах выступов меньше по сравнению с напряжениями на гладком контуре. С течением времени вокруг выработки происходит релаксация напряжений. Напряжения σ_θ в вершинах впадин уменьшаются, оставаясь однако больше, чем на гладком контуре. В вершинах выступов напряжения возрастают, оставаясь все же меньше, чем на гладком контуре (рис. 3).

Давление на крепь, определяющееся величиной σ_ρ, с течением времени возрастает и распределяется неравномерно: в вершинах впадин оно больше, чем при гладком контуре, а в вершинах выступов—меньше (рис. 4).

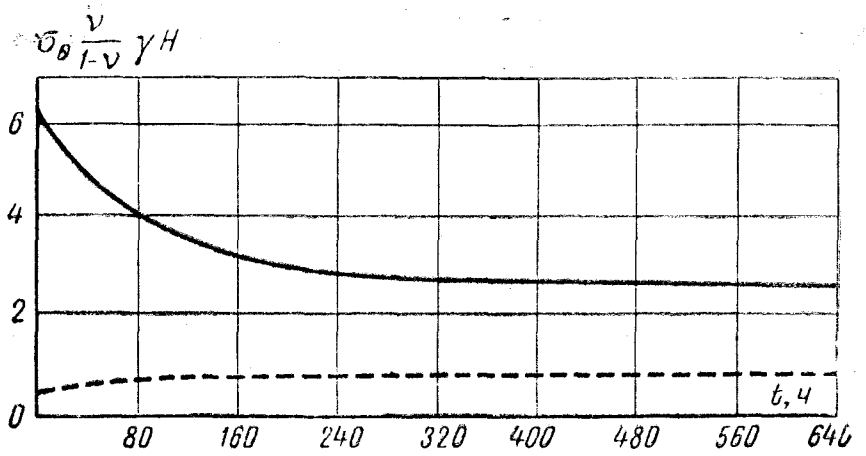


Рис. 3. Релаксация нормального тангенциального напряжения в вершине впадины (сплошные) и выступа (пунктир).

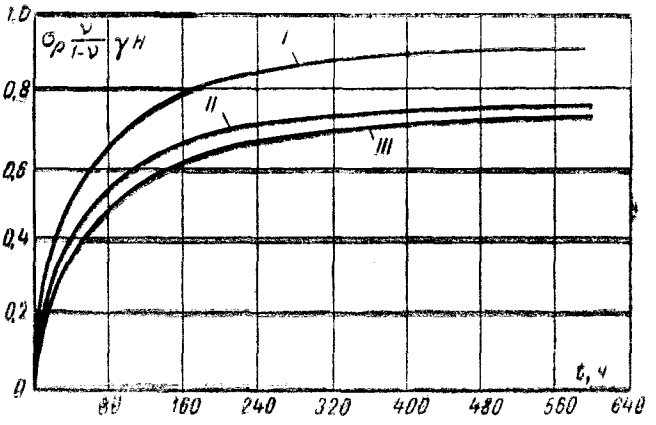


Рис. 4. Графики давления на крепь шахтного ствола:

I—в вершине впадины; *II*—для гладкого контура; *III*—в вершине выступа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баклашов И. В., Руппенейт К. В. Прочность незакрепленных горных выработок. Недра, 1965.

2. Ержанов Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. Наука, 1964.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, 1966.

4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. Приклад. мат. и мех., т. XII, вып. 1, 1948.