Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LI, вып. 3, 1970 г.

О ТОЧНОСТИ РЕЗОНАНСНОГО МЕТОДА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

В. М. Меркулова

При резонансных измерениях на продольных колебаниях определяется модуль продольной упругости E (модуль Юнга), на крутильных — модуль сдвига G. Для образца горной породы в виде стержня со свободными концами

$$E,\ G = \frac{f_n^2 4l^2}{n^2}\rho, \qquad (1)$$

где f_n — собственная резонансная частота стержня, возбуждаемого на n-м обертоне ($n=1, 2, 3\ldots$); l — длина образца; ρ — плотность породы.

Резонансная частота фиксируется электронным счетчиком с погрешностью, не превышающей сотых долей процента; длина образца определяется примерно с такой же точностью. Погрешность в значении плотности легко можно довести до десятых долей процента, применяя способ гидростатического взвешивания. Таким образом, результирующую аппаратурную (систематическую) погрешность можно снизить до десятых долей процента. Однако добиваться этого имеет смысл лишь при условии достаточной однородности исследуемых пород.

Для неоднородных образцов с зернистой структурой фаза звуковой волны при переходе от зерна к зерну отклоняется от среднего значения, что приводит к разбросу резонансных частот и, следовательно, измеряемых значений модулей упругости. Чем больше различие в плотностях и чем сильнее выражена анизотропия упругости отдельных зерен минералов, тем

сильнее будет проявляться данный эффект. Кроме того, он зависит от соотношения размеров зерен D и длины образца. В пределе $\frac{D}{l} \to 0$ образец может считаться вполне однородным и разброс резонансных частот отсутствует.

Для образцов со структурной неоднородностью из-за разброса резонансных частот последовательные обертоны всегда негармоничны. Отклонение от гармоничности во много раз превышает аппаратурную погрешность и по существу определяет ту точность, с которой целесообразно измерять модули упругости породы.*

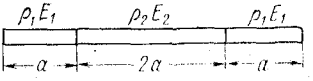


Рис. 1. Симметричное изменение плотности и модуля упругости вдоль стержня

Для оценки точности необходимо рассмотреть спектр частот неоднородного стержня. Удобно исходить из идеализированного случая, считая, что плотности и модули упругости испытывают малые и одинаковые отклонения от своих средних значений на длине $2a$, отвечающей линейным размерам зерен (рис. 1). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \rho + \Delta\rho\gamma_1(x), \quad \Delta\rho \ll \rho \\ E + \Delta E\gamma_2(x), \quad \Delta E \ll E \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Единичные функции $\gamma_{1;2}(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^l \gamma_{1;2}(x)\,dx = 0, \tag{3}$$

при котором средняя плотность по длине равна ρ, а средний модуль E.

Функции $\gamma_{1;2}(x)$ должны быть симметричны относительно центра стержня

$$\gamma_{1;2}\left[\left(x - \frac{l}{2}\right)\right] = \gamma_{1;2}\left[-\left(x - \frac{l}{2}\right)\right]. \tag{4}$$

* Меркулова В. М. Поглощение ультразвуковых волн в горных породах в области частот 10—160 *кгц*. Изв. АН СССР, физика Земли, № 6, 1968.

При антисимметричности $\gamma_{1;2}(x)$ неоднородное распределение плотности или упругости не приводит к изменению кинетической и потенциальной энергий, поэтому изменение собственной резонансной частоты стержня в первом приближении равно нулю. Влияние непостоянства плотности и упругости на точность измерений можно рассматривать отдельно, так как задача линейна.

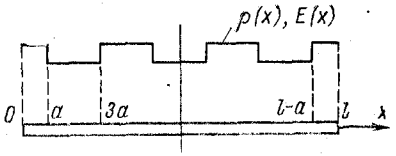


Рис. 2. Изменение плотности и модуля упругости в трехзвенном стержне

Для упрощения расчетов рассмотрим простейший случай — трехзвенный стержень (рис. 2). Двухзвенный стержень не представляет интереса, так как $\gamma_{1;2}(x)$ здесь всегда антисимметрична. Уравнение резонансных частот такого стержня можно получить из выражения для акустического входного сопротивления $Z_{вх}$ многослойной системы,* приняв $Im(Z_{вх})=0$. При этом условии

$$z_1 z_2 \operatorname{tg} x_1 - z_1 z_3 \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + z_2^2 \operatorname{tg} x_2 + z_3 z_2 \operatorname{tg} x_3 = 0, \quad (5)$$

где z_j и x_j — соответственно, акустические сопротивления и набег фазы в каждом из звеньев.

В нашем случае звенья 1 и 3 идентичны, поэтому следует принять $x_1 = x_3$, $z_1 = z_3$ и формулу (5) переписать в виде

$$\operatorname{tg} x_1 = -\frac{z_2}{z_1}\left[\frac{\operatorname{tg} x_2 + \frac{z_1}{z_2}\operatorname{tg} x_1}{1 - \frac{z_1}{z_2}\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}\right]. \quad (6)$$

* Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.

Если бы образец являлся вполне однородным, то $z_1 = z_2$, $x_2 = 2x_1$ и его резонансные частоты образовывали бы гармоничный ряд

$$f_n^0 = n\frac{v}{8a}, \tag{7}$$

где v — скорость звука в однородном образце.

Рассчитать изменения резонансных частот вследствие влияния малых неоднородностей можно по формуле (6), разложив величины $z_{1;2}$, $x_{1;2}$ и $\operatorname{tg} x_{1;2}$ в ряд с точностью до членов первого порядка. Так как фазовая скорость для каждого из звеньев $v_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, то ее изменение Δv_i связано с вариациями плотности и упругости соотношением

$$\frac{\Delta v_i}{v_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right). \tag{8}$$

Приняв $\rho_1 = \rho + \Delta\rho$, $E_1 = E + \Delta E$, $\rho_2 = \rho - \Delta\rho$ и $E_2 = E - \Delta E$, найдем отношение акустических сопротивлений

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} = 1 - \frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{\Delta E}{E}. \tag{9}$$

Отклонение резонансных частот от их значений, соответствующих однородному стержню f_n^0, обозначим

$$\Delta f_n = f_n - f_n^0. \tag{10}$$

С учетом формул (7) и (10) величины $x_{1;2}$ можно записать в виде

$$x_1 = \frac{2\pi f_n a}{v_1} = \frac{n\pi}{4} + \delta_1,$$

$$x_2 = \frac{2\pi f_n 2a}{v_2} = \frac{n\pi}{2} + \delta_2, \tag{11}$$

где

$$\delta_1 = \frac{n\pi}{4}\left[\frac{\Delta f_n}{f_n^0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\right],$$

$$\delta_2 = \frac{n\pi}{2}\left[\frac{\Delta f_n}{f_n^0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\right]. \tag{12}$$

Рассмотрим колебания стержня на четных обертонах

$$\operatorname{tg} x_1 = \delta_1, \quad \text{если } \operatorname{tg} n\frac{\pi}{4} \to 0,$$

$$\operatorname{tg} x_1 = -\frac{1}{\delta_1}, \text{ если } \operatorname{tg} n\frac{\pi}{4} \to \infty, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg} x_2 = \delta_2.$$

Подставив соотношения (13) в уравнение (6), получим

$$2\delta_1 = -\delta_2,$$

откуда

$$\frac{\Delta f_n}{f_n^\circ} = 0. \tag{14}$$

При возбуждении стержня на нечетных обертонах $n=2k+1$ ($k=0,\ 1,\ 2\ldots$) и

$$\operatorname{tg} x_1 = (-1)^k + 2\delta_1, \quad \operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{\delta_2}. \tag{15}$$

Подставив (15) и (9) в уравнение (6) и удерживая члены первого порядка, находим

$$(-1)^k(\delta_2 + 2\delta_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2}\right),$$

откуда сразу получаем формулу для величин отклонений резонансных частот

$$\frac{\Delta f_n}{f_n^\circ} = -\frac{(-1)^k}{n\pi}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta E}{E}\right). \tag{16}$$

Как следует из анализа простейшей модели трехзвенного стержня, последовательные резонансные частоты неоднородного образца негармоничны. Отклонения от гармоничности пропорциональны аддитивной сумме вариаций плотности и модуля упругости и уменьшаются с ростом частоты. Формула (16) определяет, таким образом, предельную точность резонансных измерений.

В экспериментах обычно удобно находить зависимость $\frac{f_n}{n}$

как функцию n. Для неоднородного стержня в общем случае она имеет вид

$$\frac{f_n}{n} = f_1^{\circ} F_1 F_2. \qquad (17)$$

Величина F_1 учитывает изменение собственной частоты за счет влияния радиальных движений. При малых отношениях диаметра стержня к длине волны $\left(\frac{d}{\lambda} < 0{,}2\right)$ эта функция дается поправкой Рэлея

$$F_1 = 1 - \frac{\pi^2 \sigma^2}{4}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2, \qquad (18)$$

где σ — коэффициент Пуассона.

Величина F_2 определяет «разброс» частот вследствие эффекта неоднородности; для трехзвенной модели, используя формулу (16), можно записать

$$F_2 = 1 - \frac{(-1)^k}{n\pi}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta E}{E}\right). \qquad (19)$$

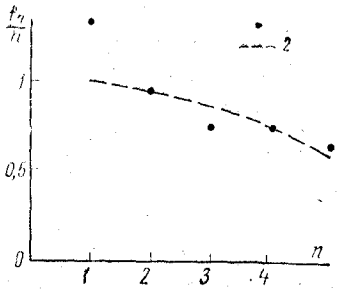


Рис. 3. Последовательные резонансные частоты трехзвенного стержня:
1 — неоднородного, *2* — однородного, построенного с учетом поправки Рэлея

На рис. 3 графически представлены зависимости (18), (19), качественно объясняющие результаты полученных ранее экспериментальных исследований на ряде пород.

Исследование частотных спектров можно использовать при определении степени неоднородности самих материалов, структурных и текстурных особенностей горных пород.