Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LIV, вып. 2, 1968 г.

УДК 548.12

НАГЛЯДНЫЙ СПОСОБ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ ПРОСТЫХ ФОРМ

Н. Г. Соколова, И. И. Шафрановский, В. А. Мокиевский

Практическое значение кристаллографических разновидностей простых форм, выведенных Г. Б. Бокием [1940], стало очевидным после вывода двойниковых законов [Мокиевский, Шафрановский, Афанасьев, 1965].

Остановимся вкратце на исторических предпосылках выводов кристаллографических разновидностей и их следствиях. Из курсов элементарной геометрии известны 47 простых кристаллографических форм (простая форма — совокупность граней, связанных между собой элементами симметрии). По-видимому, автором первого теоретического вывода простых форм является создатель первого вывода всех совокупностей элементов конечной симметрии, а в том числе и 32 видов симметрии, И. Ф. Гессель (1830). Параллельно с теоретическим выводом простые формы были фактически установлены на реальном кристаллическом материале. Н. И. Кокшаровым (1863) в частности даны все 15 простых форм кубической сингонии.

Вывод 32 видов симметрии А. В. Гадолина (1867) дал новую возможность для полного теоретического вывода простых форм. Однако сам А. В. Гадолин ограничился демонстрацией одних только общих форм.

В 1891 г. Е. С. Федоров в «Кратком руководстве по кристаллографии» параллельно с систематическим описанием 32 видов симметрии привел полный перечень всех простых форм, соответствующих тому или иному виду симметрии, и дал их изображение. Именно федоровскую трактовку простых форм с успехом использовал впоследствии П. Грот в известных руководствах по кристаллографии, а далее она была многократно повторена в учебниках, пособиях и наглядных таблицах во всем мире. Несмотря на уже имевшийся исчерпывающе полный вывод простых форм, вопрос о числе их долгое время не был выяснен до конца.

Кристаллографы длительное время смешивали понятия геометрически и физически различных простых форм. Хорошо известен, например, спор о том, являются ли осевой диэдр (сфеноид) и плоскостной диэдр (дома) одной простой формой или же они представляют две различные простые формы. В письме к Е. С. Федорову, относившему оба диэдра к одной геометрической простой форме, П. Грот писал: «Если принимать во внимание содержание, то «сфеноид» и «дома» — две различные формы, которые нельзя идентифицировать» [Переписка, . . ., 1955, стр. 198—199].

Этот спор о диэдрах разгорелся с новой силой в 1936 г. Американский кристаллограф А. Роджерс высказался в пользу существования не 47, а 48 простых форм на том основании, что «сфеноид» и «дома» — будто бы две различные формы. Окончательную ясность в этот вопрос внес А. К. Болдырев. Он четко сформулировал определение простой формы и показал чисто

геометрический характер этого понятия [Boldirew, 1936]: две простые формы различны, если они отличаются числом граней или их очертаниями, или их взаимным расположением; формы, обладающие одними и теми же указанными свойствами, принадлежат к одной простой форме. При этом симметрия не принимается в расчет — учитывается только геометрия формы. Так, например, диэдрами называются все простые формы, состоящие из двух пересекающихся граней. Сюда относится и «осевой диэдр», или «сфеноид», с симметрией *2* и «плоскостной диэдр», или «дома», с симметрией *m*, одновременно и плоскостной и осевой сфеноид с симметрией *mm*. Все эти диэдры тождественны геометрически и, следовательно, принадлежат к одной простой форме.

После статьи А. К. Болдырева раз и навсегда было установлено, что в кристаллографии существует только 47 простых форм. Однако и приведенное высказывание П. Грота о том, что «сфеноид» и «дома» различны по своему содержанию в основе своей безусловно правильно. П. Грот и А. Роджерс не увидели, что все одинаковые геометрически, но различные по симметрии, а следовательно, и по физическим и кристалломорфологическим свойствам, простые формы (не только диэдры) различны по своему содержанию. Это обстоятельство подметил А. В. Шубников: «Кристаллография различает между собой пять кубов в то время, как геометрия имеет дело только с одним кубом» [1935, стр. 167]. Сказанное было иллюстрировано пятью типами штриховки, характеризующей различную симметрию граней кубов, принадлежащих к пяти видам симметрии кубической сингонии.

Полный вывод всех кристаллографически различных простых форм, так называемых кристаллографических разновидностей простых форм, принадлежит Г. Б. Бокию [1940]. В основе вывода лежит следующее определение: две одинаковые простые формы являются кристаллографически различными (т. е. принадлежат к двум различным кристаллографическим разновидностям), если они отличаются элементами симметрии или расположением последних относительно граней. В результате пересмотра форм всех 32 видов симметрии Г. Б. Бокий вывел 146 кристаллографических разновидностей простых форм и 193 разновидности с учетом правых и левых форм. Выведенные разновидности он характеризовал с помощью специальных «формул кристаллографического различия», содержащих перечисление элементов симметрии, расположенных перпендикулярно, параллельно и косо относительно граней характеризуемой формы.

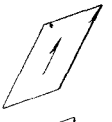
Впоследствии И. И. Шафрановский предложил выделять плоскостную симметрию граней. Контуры бугорков роста (вицинальные пирамидки), фигуры травления, узоры штриховок и прочие детали поверхностной скульптуры кристаллов подчиняются, как известно, конечной симметрии граней.

До сих пор, говоря о простых формах и их разновидностях, мы имели в виду исключительно гранные формы. Развитие геометрической кристаллографии было тесно связано с измерениями на отражательных гониометрах — приборах, требовавших наличия плоскостных граней, хорошо отражающих лучи светового источника. Этим объясняется пристальное внимание ранее названных исследователей к кристаллическим граням и почти полное игнорирование ребер и вершин кристалла. Вместе с тем «. . . процесс образования реального кристаллографического тела представляет собой сложное переплетение сосуществующих явлений роста и растворения положительных и отрицательных вершин, ребер и граней» [Мокиевский, Шафрановский, 1963, стр. 35]. Поэтому при анализе кристаллических форм наряду с общеизвестными гранными формами (совокупностями симметричных граней) необходимо учитывать также вершинные и реберные формы (совокупности симметричных вершин и ребер) [Михеев, Шафрановский, 1955; Шафрановский, Генделев, 1958]. На реальном кристалле отдельные вершины, ребра (как и грани) имеют свою собственную симметрию, ярко сказывающуюся на особенностях поверхности кристалла.

Симметрия вершин, аналогично плоскостной симметрии граней, подчиняется десяти видам плоской кристаллографической симметрии *1*, *2*, *3*,

97034

Изображение граней 146 кристаллографических разновидностей простых форм

Номер разновидности	Вид симметрии	Символ и плоскостная симметрия грани	Изображение граней с соответственными стрелками	Номер разновидности	Вид симметрии	Символ и плоскостная симметрия грани	Изображение граней с соответственными стрелками
	Моноэдр				Пинакоид		
1	1	$\frac{hkl}{1}$		11	$\bar{1}$	$\frac{hkl}{1}$	
2	2	$\frac{010}{2}$		12	2	$\frac{hok}{1}$	
3	m	$\frac{hol}{m}$		13	m	$\frac{010}{1}$	
4	mm	$\frac{001}{2mm}$		14	2/m	$\frac{010}{2}$	
5	4	$\frac{001}{4}$		15	2/m	$\frac{hol}{m}$	
6	4mm	$\frac{001}{4mm}$		16	222	$\frac{100\ 010\ 001}{2}$	
7	3	$\frac{0001}{3}$		17	mm	$\frac{100\ 010}{m}$	
8	3m	$\frac{0001}{3m}$		18	mmm	$\frac{100\ 010}{001}$ $2mm$	
9	6	$\frac{0001}{6}$		19	$\bar{4}$	$\frac{001}{2}$	
10	6mm	$\frac{0001}{6mm}$		20	422	$\frac{001}{4}$	

21	$\bar{4}2m$	$\frac{001}{2mm}$	
22	$4/m$	$\frac{001}{4}$	
23	$4/mmm$	$\frac{001}{4mm}$	
24	32	$\frac{0001}{3}$	
25	$\bar{3}$	$\frac{0001}{3}$	
26	$\bar{3}m$	$\frac{0001}{3m}$	
27	$\bar{6}$	$\frac{0001}{3}$	
28	$\bar{6}m2$	$\frac{0001}{3m}$	
29	62	$\frac{0001}{6}$	
30	$6/m$	$\frac{0001}{6}$	
31	$6/mmm$	$\frac{0001}{6mm}$	

Диэдр

32	2	$\frac{hkl}{1}$	
33	m	$\frac{hkl}{1}$	
34	mm	$\frac{okl \quad hol}{m}$	

Ромбическая призма

35	$2/m$	$\frac{hkl}{1}$	
36	222	$\frac{okl \; hok \; hko}{1}$	
37	mm	$\frac{hko}{1}$	
38	mmm	$\frac{okl \; hok \; hko}{m}$	

Ромбический тетраэдр

39	222	$\frac{hkl}{1}$	

Ромбическая пирамида

40	mm	$\frac{hkl}{1}$	

Ромбическая дипирамида

41	mmm	$\frac{hkl}{1}$	

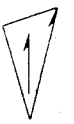
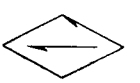
Тетрагональный тетраэдр

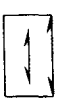
42	$\bar{4}$	$\frac{hkl}{1}$	
43	$\bar{4}2m$	$\frac{hkl}{m}$	

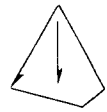
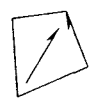
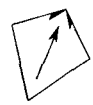
Тетрагональная призма

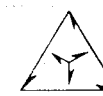
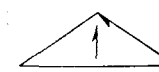
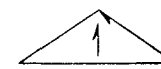
44	$\bar{4}$	$\frac{hko}{1}$	
45	4	$\frac{hko}{1}$	
46	$4mm$	$\frac{100 \quad 110}{m}$	
47	422	$\frac{100 \quad 110}{2}$	
48	$\bar{4}2m$	$\frac{100}{2}$	

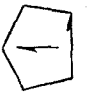
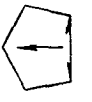
49	$\bar{4}2m$	$\frac{110}{m}$	
50	$4/m$	$\frac{hko}{m}$	
51	$4/mmm$	$\frac{100 \quad 110}{2mm}$	
	Тетрагональная пирамида		
52	4	$\frac{hkl}{1}$	
53	$4mm$	$\frac{hol \quad hhl}{m}$	
	Тетрагональная дипирамида		
54	422	$\frac{hol \quad hhl}{1}$	
55	$\bar{4}2m$	$\frac{hol}{1}$	
56	$4/m$	$\frac{hkl}{1}$	
57	$4/mmm$	$\frac{hol \quad hhl}{m}$	
	Дитетрагональная призма		
58	$4mm$	$\frac{hko}{1}$	
59	422	$\frac{hko}{1}$	
60	$\bar{4}2m$	$\frac{hko}{1}$	
61	$4/mmm$	$\frac{hko}{m}$	
	Дитетрагональная пирамида		
62	$4mm$	$\frac{hkl}{1}$	

	Дитетрагональная дипирамида		
63	$4/mmm$	$\frac{hkl}{1}$	
	Тетрагональный трапецоэдр		
64	422	$\frac{hkl}{1}$	
	Тетрагональный скаленоэдр		
65	$\bar{4}2m$	$\frac{hkl}{1}$	
	Тригональная призма		
66	3	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
67	$3m$	$\frac{11\bar{2}0 \quad 2\bar{1}\bar{1}0}{m}$	
68	32	$\frac{11\bar{2}0 \quad 2\bar{1}\bar{1}0}{2}$	
69	$\bar{6}$	$\frac{hi\bar{k}o}{m}$	
70	$\bar{6}m2$	$\frac{11\bar{2}0 \quad 2\bar{1}\bar{1}0}{2mm}$	
	Тригональная пирамида		
71	3	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
72	$3m$	$\frac{h \cdot h \cdot \bar{2}h \cdot l \quad 2h \cdot h \cdot h \cdot l}{m}$	
	Тригональная дипирамида		
73	32	$\frac{h \cdot h \cdot \bar{2}h \cdot l \quad 2h \cdot \bar{h} \cdot \bar{h} \cdot l}{1}$	
74	$\bar{6}$	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
75	$\bar{6}m2$	$\frac{h \cdot h \cdot \bar{2}h \cdot l \quad 2h \cdot \bar{h} \cdot \bar{h} \cdot l}{m}$	
	Ромбоэдр		
76	32	$\frac{ho\bar{k}l \quad okkl}{1}$	

77	$\bar{3}$	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
78	$\bar{3}m$	$\frac{ho\bar{h}l}{\frac{ok\bar{k}l}{m}}$	
Тригональный трапецоэдр			
79	32	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
Дитригональная призма			
80	3m	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
81	32	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
82	$\bar{6}m2$	$\frac{hi\bar{k}o}{m}$	
Дитригональная пирамида			
83	3m	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
Дитригональная дипирамида			
84	$\bar{6}m2$	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
Тригональный скаленоэдр			
85	$\bar{3}m$	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
Гексагональная призма			
86	3m	$\frac{10\bar{1}0}{1}$	
87	32	$\frac{10\bar{1}0}{1}$	
88	$\bar{3}$	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
89	$\bar{3}m$	$\frac{11\bar{2}0}{2}$	
90	$\bar{6}m2$	$\frac{10\bar{1}0}{m}$	
91	$\bar{6}m2$	$\frac{10\bar{1}0}{m}$	
92	6	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
93	6mm	$\frac{10\bar{1}0}{\frac{11\bar{2}0}{m}}$	
94	62	$\frac{10\bar{1}0}{\frac{11\bar{2}0}{2}}$	
95	6/m	$\frac{hi\bar{k}o}{m}$	
96	6/mmm	$\frac{10\bar{1}0}{\frac{11\bar{2}0}{2mm}}$	
Гексагональная пирамида			
97	3m	$\frac{ho\bar{h}l}{1}$	
98	6	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
99	6mm	$\frac{h\cdot h\cdot 2\bar{h}\cdot l}{\frac{h\cdot o\cdot \bar{h}\cdot l}{m}}$	
Гексагональная дипирамида			
100	$\bar{3}m$	$\frac{h\cdot h\cdot 2\bar{h}\cdot l}{1}$	
101	$\bar{6}m2$	$\frac{h\cdot o\cdot \bar{h}\cdot l}{1}$	
102	62	$\frac{h\cdot h\cdot 2\bar{h}\cdot l}{\frac{h\cdot o\cdot \bar{h}\cdot l}{1}}$	
103	6/m	$\frac{h\cdot i\cdot \bar{k}\cdot l}{1}$	
104	6/mmm	$\frac{h\cdot h\cdot 2\bar{h}\cdot l}{\frac{h\cdot o\cdot \bar{h}\cdot l}{m}}$	

	Гексагональный трапецоэдр		
105	*62*	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
	Дигексагональная призма		
106	$\bar{3}m$	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
107	*6mm*	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
108	*62*	$\frac{hi\bar{k}o}{1}$	
109	*6/mmm*	$\frac{hi\bar{k}o}{m}$	
	Дигексагональная пирамида		
110	*6mm*	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
	Дигексагональная дипирамида		
111	*6/mmm*	$\frac{hi\bar{k}l}{1}$	
	Тетраэдр		
112	*23*	$\frac{111\ \ 1\bar{1}1}{3}$	
113	$\bar{4}3m$	$\frac{111\ \ 1\bar{1}1}{3m}$	
	Тригон-тритетраэдр		
114	*23*	$\frac{hkk\ \ h\bar{k}k}{1}$	
115	$\bar{4}3m$	$\frac{hkk\ \ h\bar{k}k}{m}$	
	Тетрагон-тритетраэдр		
116	*23*	$\frac{hhl\ \ h\bar{h}l}{1}$	
117	$\bar{4}3m$	$\frac{hhl\ \ h\bar{h}l}{m}$	
	Пентагон-тритетраэдр		
118	*23*	$\frac{hkl\ \ h\bar{k}l}{1}$	

	Гексатетраэдр		
119	$\bar{4}3m$	$\frac{hkl\ \ h\bar{k}l}{1}$	
	Гексаэдр		
120	*23*	$\frac{100}{2}$	
121	*m3*	$\frac{100}{2mm}$	
122	$\bar{4}3m$	$\frac{100}{2mm}$	
123	*43*	$\frac{100}{4}$	
124	*m3m*	$\frac{100}{4mm}$	
	Тетрагексаэдр		
125	$\bar{4}3m$	$\frac{hko}{1}$	
126	*43*	$\frac{hko}{1}$	
127	*m3m*	$\frac{hko}{m}$	
	Октаэдр		
128	*m3*	$\frac{111}{3}$	
129	*43*	$\frac{111}{3}$	
130	*m3m*	$\frac{111}{3m}$	
	Тригон-триоктаэдр		
131	*m3*	$\frac{hhl}{1}$	
132	*43*	$\frac{hhl}{1}$	

133	$m3m$	$\frac{hhl}{m}$	
Тетрагон-триоктаэдр			
134	$m3$	$\frac{hkk}{1}$	
135	43	$\frac{hkk}{1}$	
136	$m3m$	$\frac{hkk}{m}$	
Пентагон-триоктаэдр			
137	43	$\frac{hkl}{1}$	
Гексаоктаэдр			
138	$m3m$	$\frac{hkl}{1}$	
Ромбододекаэдр			
139	23	$\frac{110}{1}$	
140	$\bar{4}3m$	$\frac{110}{m}$	
141	$m3$	$\frac{110}{m}$	
142	43	$\frac{110}{2}$	
143	$m3m$	$\frac{110}{2mm}$	
Пентагон-додекаэдр			
144	23	$\frac{hko}{1}$	
145	$m3$	$\frac{hko}{m}$	
Дидодекаэдр			
146	$m3$	$\frac{hkl}{1}$	

4, *6*, *m*, *2mm*, *3m*, *4mm*, *6mm*. Симметрия конечных ребер сводится к пяти случаям: *1*, *m*, $\perp$ *m*, *2*, *2mm* [Шубников, 1946; Шафрановский, Мокиевский, 1956].

При изучении форм реальных кристаллов необходимо учитывать симметрию как всей простой формы (гранной, реберной, вершинной), так и ее деталей (граней, ребер, вершин). Это возвращает исследователя к понятию о кристаллографических разновидностях простых форм не только гранных, но и вершинных и реберных. Вершинные, реберные и гранные формы нельзя рассматривать в отрыве друг от друга. Только полная их совокупность дает наиболее ясное понятие о реальном кристаллическом теле. Это положение легко продемонстрировать с помощью специальных моделей кристаллографических гранных форм. Как известно, по своей симметрии ребра кристалла разбиваются на пять реберных разновидностей. Заменив стрелками ребра на обычных учебных моделях простых гранных форм, получим модели кристаллографических разновидностей этих форм. Такое моделирование является одновременно и наиболее простым выводом подобных разновидностей. Так, например, в результате замены ребер на модели обычного куба пятью типами ребер с соответственными стрелками, мы находим пять кристаллографических гранных разновидностей куба [Шафрановский, 1962].

Модели простых форм с ребрами, снабженными стрелками, дают полное понятие и о симметрии всей фигуры в целом — плоскостной симметрии граней, линейной симметрии ребер, точечной симметрии вершин. Модели кристаллографических форм с нанесенными на них реберными стрелками предельно приближают деревянную или папочную модель кристалла к ее реальному прообразу. Они помогают наглядно и просто решать важные кристалло-

морфологические задачи. Так был сделан полный геометрический вывод двойниковых законов. Модели кристаллографических разновидностей можно успешно использовать для демонстрации возможных законов двойникования, имея удвоенный набор моделей. Прикладывая две модели одной и той же разновидности так, чтобы совпали две их грани (при непараллельном положении фигур), получим наглядные изображения двойников срастания. Мысленно вдвигая такие многогранники друг в друга, получим модели двойников прорастания.

Итак, чтобы изготовить модели кристаллографических разновидностей простых форм, надо, как указывалось, к ребрам граней на обычных деревянных или папочных моделях простых форм присоединить соответственные стрелки. Какие именно стрелки изображать в случае той или иной разновидности, показано в приведенной таблице. Для большей наглядности помимо стрелок на ребрах рекомендуются стрелки посередине граней. Они дают наглядное понятие о плоскостной симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

Бокий Г. Б. Число физически различных простых форм кристаллов. Тр. Лаб. кристаллогр. АН СССР, № 2, 1940.

Михеев В. И., Шафрановский И. И. Реберные формы кристаллов. Минер. сб. Львов. геол. о-ва, № 9, 1955.

Мокиевский В. А., Шафрановский И. И. Простые формы кристаллов. Минер. сб. Львов. геол. о-ва, № 17, 1963.

Мокиевский В. А., Шафрановский И. И., Афанасьев И. И. К вопросу о полном выводе двойниковых законов и простейшем способе их моделирования. Минер. сб. Львов. геол. о-ва, № 19, вып. 1, 1965.

Переписка Е. С. Федорова с П. Гротом. В сб. Кристаллография, вып. 3. Изд. ЛГУ, 1955.

Шафрановский И. И. Разновидности куба в кристаллографии. Кристаллография, № 7, вып. 5, 1962.

Шафрановский И. И., Генделев С. Ш. Вершинные, реберные и гранные формы кристаллов. Минер. сб. Львов. геол. о-ва, № 12, 1958.

Шафрановский И. И., Мокиевский В. А. Условия роста, геометрия и симметрия скелетных кристаллов. ЗВМО, ч. 85, вып. 2, 1956.

Шубников А. В. Как растут кристаллы. Изд-во АН СССР, 1935.

Шубников А. В. Атлас кристаллографических групп симметрии. Изд-во АН СССР, 1946.

Boldirew A. Amer. mineralog., vol. 21, 1936.