

## **СТРОГОЕ УРАВНИВАНИЕ МАРШРУТНОЙ СЕТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ**

*В. В. Зверевич*

Описываемый строгий способ уравнивания разработан на основе дифференциальных формул ошибок элементов маршрутной сети.\*

При наблюдении поперечных параллаксов в шести стандартно расположенных точках имеется одно избыточное измерение, которое дает условное уравнение [3]

$$v_{q_5} + v_{q_6} - 2v_{q_1} - v_{q_4} - v_{q_6} + 2v_{q_2} + l = 0, \quad (1)$$

где  $v_{q_i}$  — поправка в измеренные поперечные параллаксы точек модели;  $l$  — свободный член.

При соединении стереопар в маршрут совмещаются точки фотографирования и главные проектирующие лучи правого снимка предшествующей пары и левого снимка последующей пары [1]. Это совмещение достигается отождествлением координат точек фотографирования и элементов внешнего ориентирования этих снимков. После такого совмещения как плановые координаты  $X$  и  $Y$  центральной связующей точки, определенные из этих двух пар, так и высоты  $Z$  не совпадают, так как первоначально присоединяемая модель строится в произволь-

---

\* Зверевич В. В. Дифференциальные формулы для выражения ошибок элементов сети аналитической пространственной фототриангуляции одиночного маршрута. Зап. ЛГИ, т. LIX, вып. 1, 1969.

ном масштабе. Сравнивая высоты центральных связующих точек, определяют коэффициент изменения масштаба  $K_j$  присоединяемой модели. Значение  $K_j$  определяется по нескольким связующим точкам, что означает геометрически последовательное смещение по высоте этих точек [1].

Коэффициент изменения масштаба  $K_j$  нами будет определяться по одной центральной связующей точке. При таком определении  $K_j$  изменяется лишь величина свободных членов в условных уравнениях, но это не повлияет на результаты уравнивания сети строгим методом. Следует иметь в виду, что невязки не возникнут на центральных связующих точках по координате  $Z$ , так как высота центральных связующих точек необходима для соединения моделей в маршрут.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} Z &= Z_4^{(j-1)} + \Delta z_4^{(j-1)}; \\ Z &= Z_3^{(j)} + \Delta z_3^{(j-1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $Z$  — истинное значение высоты точки местности, которая изображается точкой 4 модели  $j-1$  и точкой 3 модели  $j$ ;  $Z_4^{(j-1)}$  и  $Z_3^{(j)}$  — высоты связующих точек 4 и 3, найденные из фототриангулирования;  $\Delta Z_4^{(j-1)}$  и  $\Delta Z_3^{(j)}$  — ошибки определения высот точек 4 и 3;  $j$  — номер стереомодели.

Составляя разность выражений (2), получим условное уравнение связи аппликат на боковой связующей точке

$$\Delta Z_3^{(j)} - \Delta Z_4^{(j-1)} + W_{Z_3}^{(j)} = 0, \quad (3)$$

где  $W_{Z_3}^{(j)} = Z_3^{(j)} - Z_4^{(j-1)}$  — невязка по высоте на боковой связующей точке 3 модели  $j$  при соединении моделей  $j-1$  и  $j$ .

Аналогично получаем условные уравнения связи абсцисс и ординат на боковых и центральных связующих точках при соединении моделей  $j-1$  и  $j$

$$\Delta X_i^{(j)} - \Delta X_{i+1}^{(j-1)} + W_{X_i}^{(j)} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta Y_i^{(j)} - \Delta Y_{i+1}^{(j-1)} + W_{Y_i}^{(j)} = 0, \quad (5)$$

где  $W_{X_i}^{(j)}$  и  $W_{Y_i}^{(j)}$  — невязки по осям  $X$  и  $Y$ , возникающие на связующих точках при соединении моделей  $j-1$  и  $j$ ;  $i$  — номер связующей точки.

Каждая боковая связующая точка дает три условных уравнения вида (3), (4) и (5), а центральная связующая точка дает два условия вида (4) и (5).

Подставим в условные уравнения (3), (4) и (5) значения ошибок элементов маршрутной сети аналитической пространственной фототриангуляции. Переходя от ошибок к поправкам в непосредственно измеренные величины, получим условное уравнение связи координат на связующих точках

$$AX^T + W = 0, \quad (6)$$

$$\text{где } A = \| a_1; a_2; \dots; a_{4n-1}; a_{4n} \|;$$

$$X = \| v_{q_1}, v_{q_2}, \dots, v_{q_n}, v_{p_1}, v_{p_2}, \dots,$$

$$v_{p_h}, \dots, v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n}, v_{y_1}, v_{y_2}, \dots, v_{y_n} \|;$$

$T$  — знак транспонирования.

Число условных уравнений вида (1) и (6) будет соответственно равно

$$r_1 = U, \quad (7)$$

$$r_2 = (3K + 2)(U - 1), \quad (8)$$

где  $U$  — число моделей в маршруте;  $K$  — число боковых связующих точек.

Рассмотрим условные уравнения, возникающие при наличии избыточных опорных пунктов.

Считая геодезические координаты опознаков безошибочными, можно написать

$$\left. \begin{aligned} X_r &= X_\phi + \Delta X \\ Y_r &= Y_\phi + \Delta Y \\ Z_r &= Z_\phi + \Delta Z \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где  $X_r, Y_r, Z_r$  — геодезические координаты опознаков;  $X_\phi, Y_\phi, Z_\phi$  — координаты опознаков, найденные фотограмметрически;  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  — ошибки фотограмметрического определения координат опознаков. Из (9) получим условные уравнения координат опорных пунктов

$$\left. \begin{aligned} \Delta X + W_x &= 0 \\ \Delta Y + W_y &= 0 \\ \Delta Z + W_z &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где  $W_x = X_\phi - X_r$ ;  $W_y = Y_\phi - Y_r$ ;  $W_z = Z_\phi - Z_r$  — невязки условных уравнений.

Подставив в (10) значения ошибок  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$  координат опознаков и перейдя к поправкам, получим условные уравнения координат опознаков

$$DY^T + BX^T + W = 0, \quad (11)$$

где  $D = \|d_1, d_2, \dots, d_7\|$ ;

$B = \|b_1, b_2, \dots, b_{4n-1}, b_{4n}\|$ ;

$Y = \|vt; vX_{s_0}; vY_{s_0}; vZ_{s_0}; v\alpha_1; v\omega_1; v_{x_1}\|$  — поправки к ЭВО сети;

$X = \|v_{q_1}; v_{q_2}; \dots; v_{q_n}; v_{p_1}; v_{p_2}; \dots, v_{p_n}; v_{x_1}; v_{x_2}; \dots$

$\dots; v_{x_n}; v_{y_1}; v_{y_2}; \dots; v_{y_n}\|$ .

Для внешнего ориентирования маршрута надо знать семь координат опознаков: плановые координаты и высоты двух опознаков, расположенных в начале и конце маршрута, и высоту третьего опознака, не лежащего на прямой, проходящей через первые два опорных пункта. Поэтому число условных уравнений координат опознаков (11), которое надо включить в уравновешивание, будет

$$r_3 = N - 7, \quad (12)$$

где  $N$  — общее число известных координат опознаков.

Для примера составим условные уравнения, возникающие в фототриангуляционной маршрутной сети, создаваемой аналитически по алгоритму профессора А. Н. Лобанова по плановым снимкам равнинной местности, имеющим продольное перекрытие в 60%. Фокусное расстояние АФА принято 70 мм. Элементы взаимного ориентирования снимков определялись по шести стандартно расположенным точкам, для которых элементы стандартного расположения принимались  $a=b=70$  мм. При вычислении коэффициентов условных уравнений

было принято, что оптическая ось АФА вертикальна, базисы фотографирования равны между собой, горизонтальны и расположены на одной прямой, а углы поворота снимков  $\kappa=0$ .

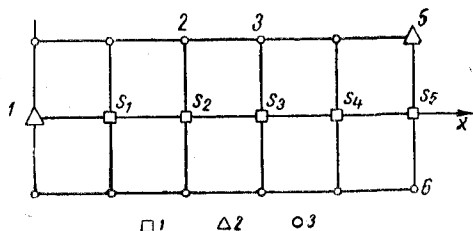


Схема маршрутной сети фототриангуляции:

1 — главные точки аэроснимков; 2 — опорные точки;  
3 — боковые точки фототриангуляции

Маршрут состоит из пяти моделей и обеспечен тремя опознаками (рисунок). Число боковых связующих точек принималось равным двум. Для такого маршрута было составлено пять условных уравнений вида (1), тридцать два — вида (6), два — вида (11) при  $U=5$ ,  $K=2$ ,  $N=9$ .

Для указанных условий были подсчитаны коэффициенты условных уравнений (6) и (11). Условные уравнения получились при  $j=2, 3, 4, 5$ .

1. Условные уравнения связи апикат на верхней связующей точке

$$\begin{aligned} 2v_{q_1}^{(j-1)} - 6v_{q_2}^{(j-1)} + v_{q_3}^{(j-1)} + v_{q_4}^{(j-1)} + v_{q_5}^{(j-1)} + v_{q_6}^{(j-1)} + \\ + 4v_{p_1}^{(j-1)} - 4v_{p_2}^{(j-1)} - 6v_{q_1}^{(j)} + 2v_{q_2}^{(j)} + v_{q_3}^{(j)} + \\ + v_{q_4}^{(j)} + v_{q_5}^{(j)} + v_{q_6}^{(j)} - 4v_{p_1}^{(j)} + 4v_{p_2}^{(j)} + W_{z_3}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Условные уравнения связи абсцисс на верхней связующей точке

$$v_{p_1}^{(j-1)} - v_{x_1}^{(j-1)} + v_{x_2}^{(j)} + v_{x_3}^{(j)} = 0. \quad (14)$$

3. Условные уравнения связи ординат на верхней связующей точке

$$\begin{aligned} -4v_{q_1}^{(j-1)} + 8v_{q_2}^{(j-1)} + 2v_{q_3}^{(j-1)} - 2v_{q_4}^{(j-1)} - 4v_{q_5}^{(j-1)} - 4v_{q_6}^{(j-1)} + \\ + 4v_{p_1}^{(j-1)} + 6v_{q_1}^{(j)} - 2v_{q_2}^{(j)} - v_{q_3}^{(j)} - v_{q_4}^{(j)} - v_{q_5}^{(j)} - v_{q_6}^{(j)} + \\ + 4v_{p_1}^{(j)} - 4v_{p_2}^{(j)} + 4v_{y_3}^{(j)} + W_{y_3}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

4. Условные уравнения связи аппликат на нижней связующей точке

$$\begin{aligned} & -2v_{q_1}^{(j-1)} + 6v_{q_2}^{(j-1)} - v_{q_3}^{(j-1)} - v_{q_4}^{(j-1)} - v_{q_5}^{(j-1)} - v_{q_6}^{(j-1)} + \\ & + 4v_{p_2}^{(j-1)} - 4v_{p_6}^{(j-1)} + 6v_{q_1}^{(j)} - 2v_{q_2}^{(j)} - v_{q_3}^{(j)} - v_{q_4}^{(j)} - \\ & - v_{q_5}^{(j)} - v_{q_6}^{(j)} - 4v_{p_1}^{(j)} + 4v_{p_5}^{(j)} + W_{z_0}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

5. Условные уравнения связи абсцисс на нижней связующей точке

$$v_{p_6}^{(j-1)} - v_{x_6}^{(j-1)} + v_{x_5}^{(j)} + W_{x_5}^{(j)} = 0. \quad (17)$$

6. Условные уравнения связи ординат на нижней связующей точке

$$\begin{aligned} & -4v_{q_1}^{(j-1)} + 8v_{q_2}^{(j-1)} - 2v_{q_4}^{(j-1)} + 2v_{q_6}^{(j-1)} - 4v_{p_2}^{(j-1)} - 4v_{y_6}^{(j-1)} + \\ & + 4v_{p_6}^{(j-1)} + 6v_{q_1}^{(j)} - 2v_{q_2}^{(j)} - v_{q_3}^{(j)} - v_{q_4}^{(j)} - v_{q_5}^{(j)} - v_{q_6}^{(j)} - \\ & - 4v_{p_5}^{(j)} + 4v_{p_1}^{(j)} + 4v_{y_5}^{(j)} + W_{y_5}^{(j)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

7. Условные уравнения связи абсцисс на центральной связующей точке

$$v_{p_2}^{(j-1)} - v_{x_2}^{(j-1)} + v_{x_1}^{(j)} + w_{x_1}^{(j)} = 0. \quad (19)$$

8. Условные уравнения связи ординат на центральной связующей точке

$$v_{q_2}^{(j-1)} - v_{y_2}^{(j-1)} + v_{y_1}^{(j)} + W_{y_1}^{(j)} = 0. \quad (20)$$

9. Условное уравнение абсцисс опознака 5 (рисунок)

$$\begin{aligned} & D_1 Y^T + 2v_{q_1}^{(1)} - 2v_{q_2}^{(1)} - 5v_{q_3}^{(1)} + 9v_{q_4}^{(1)} + 5v_{q_5}^{(1)} - 9v_{q_6}^{(1)} - 8v_{p_2}^{(1)} + \\ & + 2v_{q_1}^{(2)} - 2v_{q_2}^{(2)} + 4v_{q_3}^{(2)} + 3v_{q_4}^{(2)} + 4v_{q_5}^{(2)} - 3v_{q_6}^{(2)} + \\ & + 8v_{p_1}^{(2)} - 6v_{p_2}^{(2)} + 2v_{q_1}^{(3)} - 2v_{q_2}^{(3)} + 3v_{q_3}^{(3)} + 2v_{q_4}^{(3)} - 3v_{q_5}^{(3)} - \\ & - 2v_{q_6}^{(3)} + 6v_{p_1}^{(3)} - 4v_{p_2}^{(3)} + 2v_{q_1}^{(4)} - 2v_{q_2}^{(4)} + 2v_{q_3}^{(4)} + v_{q_4}^{(4)} - 2v_{q_5}^{(4)} - \\ & - v_{q_6}^{(4)} + 4v_{p_1}^{(4)} - 2v_{p_2}^{(4)} + 2v_{q_1}^{(5)} - 2v_{q_2}^{(5)} + v_{q_3}^{(5)} - v_{q_5}^{(5)} + 2v_{p_1}^{(5)} + \\ & + 2v_{x_4}^{(5)} - 2v_{p_4}^{(5)} + W_x = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

# 10. Условное уравнение ординат опознака 5

$$\begin{aligned}
 D_2 Y^T - 8v_{q_1}^{(1)} + 10v_{q_2}^{(1)} - v_{q_3}^{(1)} + 2v_{q_4}^{(1)} + v_{q_5}^{(1)} - 2v_{q_6}^{(1)} - 2v_{p_1}^{(1)} - \\
 - 6v_{q_1}^{(2)} + 8v_{q_2}^{(2)} + v_{q_3}^{(2)} + v_{q_4}^{(2)} + v_{q_5}^{(2)} - v_{q_6}^{(2)} + 2v_{p_1}^{(2)} - v_{p_2}^{(2)} - \\
 - v_{q_6}^{(2)} + 2v_{p_1}^{(2)} - 2v_{p_2}^{(2)} - 4v_{q_1}^{(3)} + 6v_{q_2}^{(3)} + v_{q_3}^{(3)} + v_{q_4}^{(3)} - v_{q_5}^{(3)} - \\
 - v_{q_6}^{(3)} + 2v_{p_1}^{(3)} - 2v_{p_2}^{(3)} - 2v_{q_1}^{(4)} + 4v_{q_2}^{(4)} + v_{q_3}^{(4)} + v_{q_4}^{(4)} - \\
 - v_{q_5}^{(4)} - v_{q_6}^{(4)} + 2v_{p_1}^{(4)} - 2v_{p_2}^{(4)} + 2v_{q_5}^{(5)} - 2v_{p_1}^{(5)} + W_y = 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Решая условные уравнения (13)—(22) вместе с условными уравнениями (1) под условием  $[pvv] = \min$ , найдем поправки в ЭВО сети и к непосредственно измеренным величинам — фотокоординатам и параллаксам точек каждой модели. Предложенный способ уравнивания маршрутной сети пространственной фототриангуляции позволяет вычислить по строгим формулам точность фототриангулирования. Имея значения средних квадратических ошибок строго уравненных координат точек сети, можно по методике, изложенной в работе С. Г. Могильного [2] и опробованной на оценке точности геодезических работ, проанализировать точность аналитической пространственной фототриангуляции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лобанов А. Н. и др. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. Недра, 1967.
2. Могильный С. Г. Об оценке точности результатов уравнивания маркшейдерско-геодезических измерений. Изв. ВУЗов «Горн. журн.», вып. 1, 1965.
3. Урмаев Н. А. Элементы фотограмметрии. Геодезиздат, 1941.