Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LIX, вып. 1, 1969 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВ НЕИЗВЕСТНЫХ ПО ГРАФУ СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Коробков

В статье рассматривается методика построения и преобразования графов систем нормальных уравнений для определения весов неизвестных применительно к уравниванию геодезических сетей способом посредственных измерений.

На рис. 1 изображен У-граф G_y*, отображающий матрицу (1) системы четырех нормальных уравнений, что соответствует уравниванию некоторой плановой геодезической сети с двумя определяемыми пунктами

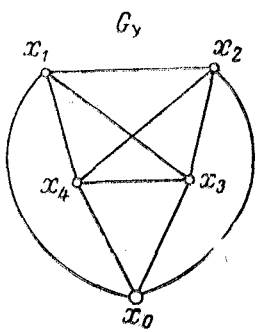


Рис. 1. Граф матрицы системы нормальных уравнений

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ [ab] & [bb] & [bc] & [bd] \\ [ac] & [bc] & [cc] & [cd] \\ [ad] & [bd] & [cd] & [dd] \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Коэффициенты ребер указанного графа пред ставлены в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_0 & 0 & -[ab] & -[ac] & -[ad] \\ b_0 & -[ab] & 0 & -[bc] & -[bd] \\ c_0 & -[ac] & -[bc] & 0 & -[cd] \\ d_0 & -[ad] & -[bd] & [cd] & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

* Коробков С. А. Определение весовых коэффициентов преобразованием графов. Изв. ВУЗов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 1, 1968.

где

$$a_0 = [aa] + [ab] + [ac] + [ad];$$
$$b_0 = [bb] + [ab] + [bc] + [bd];$$
$$c_0 = [cc] + [ac] + [bc] + [cd];$$
$$d_0 = [dd] + [ad] + [bd] + [cd].$$

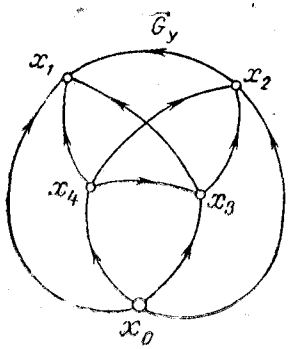


Рис. 2. Направленный граф треугольной матрицы нормальных уравнений

Вершины x_1, x_2, x_3, x_4 графа G_y соответствуют неизвестным начальной системы нормальных уравнений, вершина x_0 играет роль исходного пункта свободной геодезической сети.

В основу определения веса p_i какого-либо неизвестного x_i принято выражение

$$p_i = \frac{D}{D_i}, \qquad (3)$$

где D_i — определитель подграфа G_i, получаемого преобразованием G_y; D — определитель матрицы (1) или, что одно и то же, определитель У-графа G_y.

D можно также получить по направленному У-графу $\vec{G}_y$ (рис. 2), если построить его в соответствии с треугольной матрицей:

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] & [bd\cdot 1] \\ 0 & 0 & [cc\cdot 2] & [cd\cdot 2] \\ 0 & 0 & 0 & [dd\cdot 3] \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

При этом коэффициенты дуг этого графа будут представлены в виде матрицы (5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & -[ab] & -[ac] & -[ad] \\ [b_0\cdot 1] & 0 & 0 & -[bc\cdot 1] & -[bd\cdot 1] \\ [c_0\cdot 2] & 0 & 0 & 0 & -[cd\cdot 2] \\ [d_0\cdot 3] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$
\begin{aligned}
a_0 &= |aa| + |ab| + |ac| + |ad|;\\
|b_0 \cdot 1| &= |bb \cdot 1| + |bc \cdot 1| + |bd \cdot 1|;\\
|c_0 \cdot 2| &= |cc \cdot 2| + |cd \cdot 2|;\\
|d_0 \cdot 3| &= |dd \cdot 3|.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Прадеревом (или однонаправленным деревом) с корнем в x_0 называется граф, если в каждую его вершину, отличную от x_0, заходит только одна дуга; если в x_0 не заходит ни одна дуга и если граф не содержит контуров. *

D графа $\vec{G}_y$ представим в виде суммы всех его прадеревьев с корнем в x_0. Нетрудно заметить, что для $\vec{G}_y$ нашего примера число всех прадеревьев с корнем в x_0 равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, по числу слагаемых в каждом сомножителе определителя $D = |aa||bb \cdot 1||cc \cdot 2||dd \cdot 3|$ с учетом (6). В общем случае, очевидно, число всех прадеревьев с корнем в x_0 для направленного графа, отображающего треугольную матрицу вида (4) системы n преобразованных нормальных уравнений, будет не больше $n!$

При подсчете и построении прадеревьев графа $\vec{G}_y$ удобно пользоваться следующей треугольной таблицей, содержащей номера дуг прадеревьев:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
01 & 21 & 31 & 41 & . & . & . & n1\\
 & 02 & 32 & 42 & . & . & . & n2\\
 & & 03 & 43 & . & . & . & n3\\
 & & & 04 & . & . & . & n4\\
 & & & & . & . & . & \\
 & & & & & . & . & \\
 & & & & & & . & \\
 & & & & & & 0n &
\end{array}
\tag{7}
$$

На рис. 3 изображены все прадеревья графа $\vec{G}_y$ (рис. 2) с корнем в x_0. В соответствии с таблицей (7) прадерево 1 состоит из дуг 01, 02, 03, 04; прадерево 2 состоит из дуг 21, 02, 03, 04; прадерево 3 из дуг 31, 02, 03, 04 и т. д.

* Авандо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. «Прогресс», 1966.

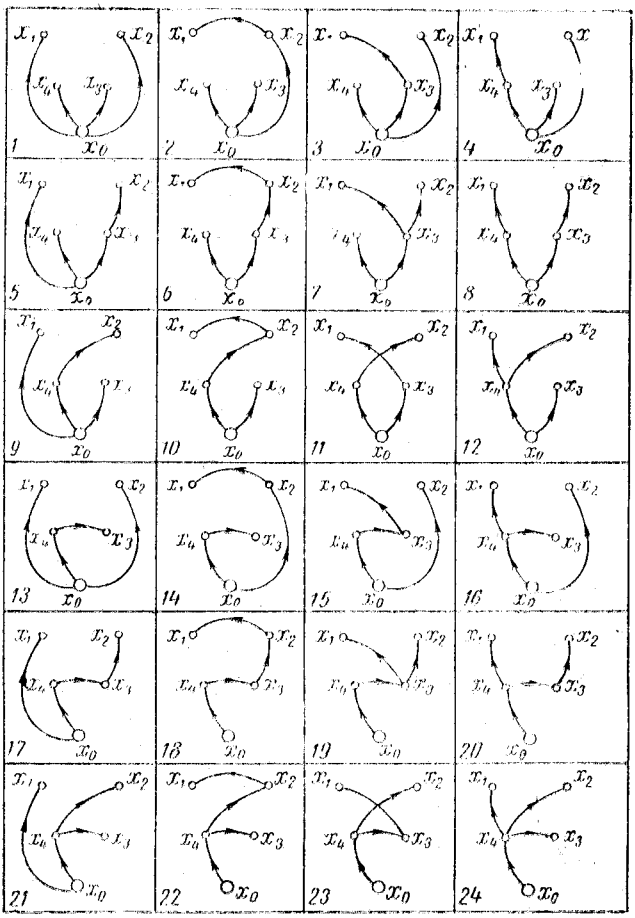


Рис. 3 Прадеревья определителя направленного графа

Для определения весов p_3 и p_4 построим У-граф $G_{\text{у}}^{(2)}$ (рис. 4, *а*) в соответствии с матрицей

$$\begin{pmatrix} [cc\cdot 2] & [cd\cdot 2] \\ [cd\cdot 2] & [dd\cdot 2] \end{pmatrix} \tag{8}$$

системы двух последних (по порядку исключения неизвестных) нормальных уравнений.

Матрица коэффициентов ребер этого графа будет

$$\begin{pmatrix} 0 & [c_0 \cdot 2] & [d_0 \cdot 2] \\ [c_0 \cdot 2] & 0 & -[cd \cdot 2] \\ [d_0 \cdot 2] & -[cd \cdot 2] & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$[c_0 \cdot 2] = [cc \cdot 2] + [cd \cdot 2];$$
$$[d_0 \cdot 2] = [dd \cdot 2] + [cd \cdot 2].$$

Согласно (3) имеем

$$p_3 = \frac{D^{(2)}}{D_3^{(2)}}, \quad p_4 = \frac{D^{(2)}}{D_4^{(2)}}, \qquad (10)$$

где $D^{(2)} = [cc \cdot 2][dd \cdot 3]$, или в виде суммы трех деревьев У-графа (рис. 4, *а*) $D^{(2)} = [c_0 \cdot 2][d_0 \cdot 2] + [c_0 \cdot 2](-[cd \cdot 2]) + [d_0 \cdot 2](-[cd \cdot 2])$; $D_3^{(2)}$ — определитель подграфа $G_3^{(2)}$ (рис. 4, *б*), полученного преобразованием У-графа $G_y^{(2)}$ путем совмещения вершины x_3 с вершиной x_0. Очевидно, $D_3^{(2)} = [d_0 \cdot 2] + (-[cd \cdot 2])$; $D_4^{(2)} = [c_0 \cdot 2] + (-[cd \cdot 2])$ — определитель подграфа $G_4^{(2)}$ (рис. 4, *в*), полученного из $G_4^{(2)}$ путем совмещения вершины x_4 с вершиной x_0.

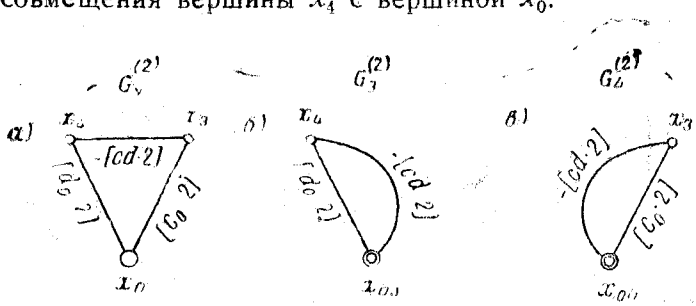


Рис. 4. Преобразование графа для определения весов p_3 и p_4

Подставив в (10) соответствующие значения определителей, после небольших преобразований, получим известные выражения для веса последнего и предпоследнего неизвестных

$$p_4 = [dd \cdot 3], \quad p_3 = \frac{[cc \cdot 2]}{[dd \cdot 2]}[dd \cdot 3].$$

Отображением матрицы

$$\begin{pmatrix} [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] & [bd\cdot 1] \\ [bc\cdot 1] & [cc\cdot 1] & [cd\cdot 1] \\ [bd\cdot 1] & [cd\cdot 1] & [dd\cdot 1] \end{pmatrix} \tag{11}$$

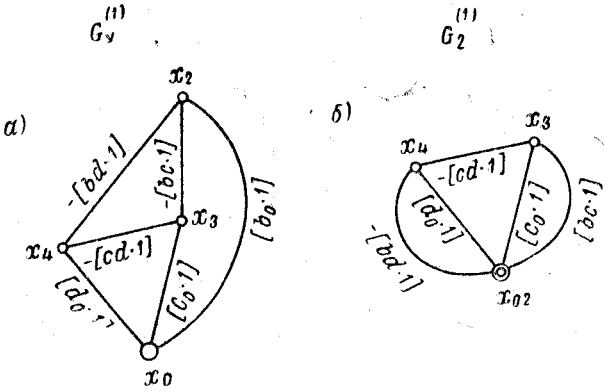


Рис. 5. Преобразование графа для определения веса p_2

является У-граф $G_y^{(1)}$ (рис. 5, *а*) с матрицей коэффициентов его ребер

$$\begin{pmatrix} 0 & [b_0\cdot 1] & [c_0\cdot 1] & [d_0\cdot 1] \\ [b_0\cdot 1] & 0 & -[bc\cdot 1] & -[bd\cdot 1] \\ [c_0\cdot 1] & -[bc\cdot 1] & 0 & -[cd\cdot 1] \\ [d_0\cdot 1] & -[bd\cdot 1] & -[cd\cdot 1] & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где

$$[b_0\cdot 1] = [bb\cdot 1] + [bc\cdot 1] + [bd\cdot 1],$$
$$[c_0\cdot 1] = [cc\cdot 1] + [bc\cdot 1] + [cd\cdot 1],$$
$$[d_0\cdot 1] = [dd\cdot 1] + [bd\cdot 1] + [cd\cdot 1].$$

При помощи У-графа $G_y^{(1)}$ вес неизвестного x_2 определится как

$$p_2 = \frac{D^{(1)}}{D_2^{(1)}} = \frac{[bb\cdot 1][cc\cdot 2][dd\cdot 3]}{[cc\cdot 1][dd\cdot 1] - [cd\cdot 1]^2}.$$

Определитель $D_2^{(1)}$ подграфа $G_2^{(1)}$ (рис. 5, *а*) найдем как сумму трех его деревьев

$$D_2^{(1)} = (-[bd\cdot 1] + [d_0\cdot 1])(-[bc\cdot 1] + [c_0\cdot 1]) +$$
$$+ (-[cd\cdot 1])(-[bd\cdot 1] + [d_0\cdot 1]) + (-[cd\cdot 1])(-[bc\cdot 1] + [c_0\cdot 1]).$$

Определитель $D^{(1)} = [bb\cdot 1][cc\cdot 2][dd\cdot 3]$ можно также получить непосредственно по рис. 5, *а*.

Вес $p_1 = \frac{D}{D_1}$ найдем по У-графу G_y (рис. 1) и его подграфу G_1 (рис. 6, *а*, *б*), который построен совмещением вершины x_1 с вершиной x_0.

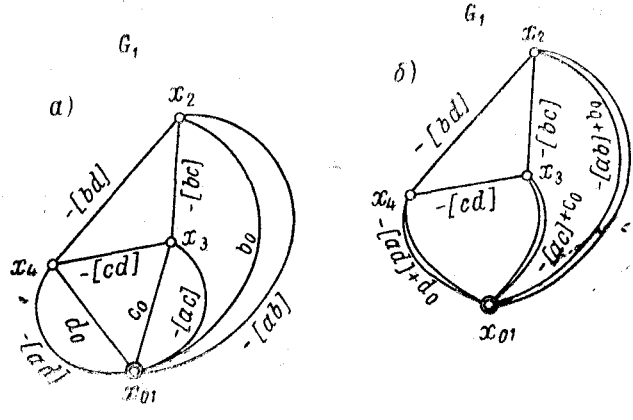


Рис. 6. Преобразование графа для определения веса p_1

Изложенная методика определения весов неизвестных по соответствующим графам систем нормальных уравнений может найти применение как при анализе точности определения пунктов триангуляции или трилатерации, так и при анализе точности определения пунктов полигонометрии или нивелировки.