Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LIX, вып. 1, 1969 г.

ОБ ОЦЕНКЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ СПОСОБОВ УРАВНИВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

В. Г. Зданович

Изучение и анализ приближенных способов уравнивания имеет важное практическое значение. Очевидно, что во всех случаях приближенные способы уравнивания дают результаты менее точные по сравнению с результатами, которые могут быть получены при уравнивании по способу наименьших квадратов (при условии правильного его применения). Поэтому практическое использование приближенных способов обусловлено только стремлением уменьшить трудоемкость уравнительных вычислений.

Однако некоторые авторы пытаются придать особую роль приближенным способам уравнивания и в связи с этим выдвигается проблема изыскания таких приближенных способов, которые давали бы результаты более надежные, чем способ наименьших квадратов [2]. По нашему мнению, такой взгляд в корне ошибочен, а проблема, выдвинутая В. Г. Конусовым, вообще не существует.

Легко усмотреть, что, говоря о способе наименьших квадратов, В. Г. Конусов имеет в виду формальное применение принципа $[pvv]=\min$, при котором, например, не учитываются систематические ошибки измерений и ошибки исходных данных. Такое уравнивание, хотя и основанное на принципе наименьших квадратов, представляет собою один из приближенных способов, который, конечно, может уступать по точности другим подобным способам уравнивания. Вместе с тем возможности способа наименьших квадратов далеко не ограничиваются рамка-

ми, очерченными в работе [2], и поэтому нужно говорить о правильном применении принципа $[pvv]=\min$, с учетом конкретных условий и характера ошибок измерений, а не об изыскании приближенных способов, превосходящих способ наименьших квадратов по точности получаемых результатов. Таким образом, проблемы, выдвинутой в работе В. Г. Конусова [2], попросту не существует, а остается известный вопрос о сравнительной оценке приближенных способов уравнивания.

Основной задачей в этой области является совершенствование методики оценки приближенных способов главным образом в части более полного учета влияния различных источников ошибок. Это требует прежде всего глубокого изучения природы ошибок геодезических измерений, что представляет проблему чрезвычайно трудную. Поэтому нельзя надеяться на то, что в ближайшее время станет возможным достаточно надежный учет влияния систематических ошибок измерений. С учетом этого геодезические измерения всегда выполняются так, чтобы влияние систематической части погрешности было по возможности минимальным. Поэтому во многих случаях практики при оценке приближенных способов уравнивания можно ограничиться только учетом случайных ошибок, так как влияние их будет доминирующим.

В настоящее время методика, отвечающая этому случаю, развита достаточно удовлетворительно, причем существенный шаг вперед в этом направлении был сделан в работах [1, 4, 5, 6].

В настоящей статье имеются в виду только те способы приближенного уравнивания, которые дают для интересующей нас функции несмещенную оценку. Именно такие способы приближенного уравнивания применяются в маркшейдерской и геодезической практике и поэтому сделанное ограничение вполне естественно.

При оценке приближенных способов уравнивания следует различать две ситуации, когда оцениваются: 1) результат приближенного способа уравнивания конкретного ряда измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, которым отвечают вполне определенные невязки условных уравнений; 2) принципиальная допустимость приближенного способа уравнивания или производится сравнительная оценка приближенных способов безотносительно к результатам конкретных измерений.

В первом случае средняя квадратическая ошибка $m_{F_{\text{пр}}}$ значения некоторой функции $F_{\text{пр}}$, полученного из приближенного уравнивания, будет равна по [5]

$$\hat{m}^2_{F_{\text{пр}}} = \eta^2 + D, \qquad (1)$$

где $\eta = F_{\text{пр}} - F_{\text{стр}}$ — разность между значениями F, найденными из приближенного и строгого уравнивания; D — дисперсия $F_{\text{стр}}$.

Отметим, что для приближенных способов уравнивания, дающих несмещенную оценку, величина η представляет собою условное математическое ожидание истинной ошибки $\Delta F_{\text{пр}}$ функции $F_{\text{пр}}$, отвечающей данному сочетанию свободных членов условных уравнений.

Первый случай в сущности не имеет практического значения, поскольку нахождение η требует выполнения как приближенного, так и строгого уравнивания.

Во втором случае обычно поступают следующим образом. Значение $F_{\text{пр}}$ представляют в виде

$$F_{\text{пр}} = F_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_{\text{пр}}}{\partial l_i} \right) \Delta_i, \qquad (2)$$

где F_0 — истинное значение F; Δ_i — истинные ошибки измерений l_i.

После этого находят

$$M^2_{F_{\text{пр}}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_{\text{пр}}}{\partial l_i} \right)^2 m^2_{l_i}, \qquad (3)$$

принимая затем $M_{F_{\text{пр}}}$ в качестве основного показателя точности значения $F_{\text{пр}}$. В этом случае $M_{F_{\text{пр}}}$ рассматривается как дисперсия $F_{\text{пр}}$ со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Имея в виду, что в конкретных случаях условное МО $(\Delta F_{\text{пр}}) = \eta \neq 0$, иногда задают вопрос о том, правомочно ли применение формулы (3) и возможна ли оценка приближенных способов путем сравнения отвечающих им значений $M_{F_{\text{пр}}}$. По нашему мнению, такой вопрос лишен смысла после исследований А. А. Визгина [1], который установил, что

$$M^2_{F_{\text{пр}}} - M^2_{F_{\text{стр}}} = \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2; \qquad (4)$$

при $n \to \infty$.

Поэтому сейчас нам точно известен смысл величины, получаемой по формуле (3), и вопрос заключается лишь в том, как наилучшим образом использовать эти данные при оценке приближенных способов уравнивания.

Очевидно, что предпочтительнее будет тот способ уравнивания, который дает меньшее значение η, или, безотносительно к конкретным рядам ошибок Δ_i, — меньшее значение δ. Если для двух способов уравнивания $M_{F_{1\text{пр}}} > M_{F_{2\text{пр}}}$, то и $\delta_1 < \delta_2$, и предпочтение в общем должно быть отдано первому способу. Таким образом, сравнение по $M_{F_{\text{пр}}}$ имеет определенный смысл.

Следует иметь в виду, что формула (3) справедлива только для приближенных способов уравнивания, дающих несмещенные оценки для F. Это выражается в виде требования, чтобы

$$F_{\text{пр}}(L_1,\ L_2 \ldots L_n) - F_o = 0, \qquad (5)$$

где F_0 — истинное значение функции F; L_i — истинное значение измеренной величины l_i.

Иначе говоря, формула (3) применима в том случае, когда $\eta = F_{\text{пр}} - F_{\text{стр}}$ можно рассматривать как случайную величину с математическим ожиданием, равным нулю.

Если не учитывать этих ограничений и относить к приближенным способам вообще любые приемы получения F по результатам измерений, то использование формулы (3) может привести к сугубо неверным результатам. Это можно продемонстрировать следующим простым примером. Пусть даны два равноточно измеренных значения l_1 и l_2 величины L, полученные со средней ошибкой μ. Приближенно уравненное значение этой величины пусть находится по формуле

$$l_{\text{пр}} = k_1 l_1 + k_2 l_2.$$

Так что согласно (3)

$$M^2_{l_{\text{пр}}} = (k_1^2 + k_2^2)\,\mu^2.$$

Если взять гипотетический случай, когда $k_1 = \frac{1}{2}$ и $k_2 < \frac{1}{2}$, то получим $M^2_{l_{\text{пр}}} < \frac{1}{2}\mu^2$, т. е. ошибка приближенного способа окажется меньше ошибки результата строгого уравнивания $M^2_{l_{\text{стр}}} = \frac{1}{2}\mu^2$. Это, конечно, невозможно и подобный «парадокс» лишь указывает на то, что

формула (3) в данном случае вообще не применима вследствие несоблюдения указанных выше ограничений (5), сводящихся здесь к требованию, чтобы $k_1 + k_2 = 1$.

Сопоставление $M_{F_{пр}}$ дает качественную сравнительную оценку приближенных способов уравнивания, но ничего не говорит о происходящем при этом количественном понижении точности по сравнению с той, которая может быть достигнута при строгом уравнивании измерений по способу наименьших квадратов. Для того чтобы получить эту наиболее важную оценку, необходимо сравнивать точность результатов приближенного и строгого уравнивания. Такое сравнение возможно с использованием η или средних квадратических ошибок $M_{F_{пр}}$ и $M_{F_{стр}}$.

В отношении выбора наиболее целесообразных показателей для характеристики точности $F_{пр}$ имеются различные рекомендации. Чаще всего для оценки точности используется значение ошибки [1, 3]

$$M^2_{F_{пр}} = M^2_{F_{стр}} + \delta^2. \tag{6}$$

Статистический смысл $M_{F_{пр}}$ выясняется из рассмотрения следующего массового процесса. Предположим, что произведено множество рядов измерений одних и тех же величин, дающих всевозможные комбинации свободных членов условных уравнений. Тогда для результатов уравнивания приближенным способом каждого ряда измерений имеем

$$m^2_{F_i\,пр} = \eta^2 + D. \tag{7}$$

Принимая $D = M^2_{F_{стр}}$, можно написать

$$M^2_{F_{пр}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^2_{F_i\,пр} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + D = \delta^2 + M^2_{F_{стр}} \tag{8}$$

при $n \to \infty$.

Если приближенный способ уравнивания дает несмещенную оценку, то $M_{F_{пр}}$ можно рассматривать как дисперсию $F_{пр}$ и на этом основании находить предельную ошибку $F_{пр}$ по формуле

$$(M_{F_{пр}})_{пред} = tM_{F_{пр}}, \tag{9}$$

отвечающей доверительному интервалу

$$-tM_{F_{\text{пр}}} \leqslant \Delta F_{\text{пр}} \leqslant tM_{F_{\text{пр}}}, \qquad (10)$$

в котором коэффициент t определяется по принятой доверительной вероятности ω.

При несмещенных оценках η представляет случайную величину с $MO(\eta)=0$ и средним, равным δ, так что

$$\eta_{\text{пред}} = t\delta. \qquad (11)$$

Формуле (11) отвечает доверительный интервал

$$-t\delta \leqslant \eta \leqslant +t\delta, \qquad (12)$$

в котором t находится по принятой доверительной вероятности ω.

Величины δ и $\eta_{\text{пред}}$ — основные показатели для оценки возможных расхождений результатов приближенного и строгого уравнивания.

С. Г. Могильным [4, 5] предложены два новых показателя точности результатов приближенного уравнивания, которыми являются введенные им эквивалентная ошибка $M_{\text{экв}}$ и вероятность $P(|\Delta F_{\text{пр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|)$ того, что истинная ошибка $\Delta F_{\text{пр}}$ будет по абсолютной величине больше истинной ошибки $\Delta F_{\text{стр}}$.

Отношение $M_{\text{экв}}$ к средней квадратической ошибке m измеренных величин показывает, во сколько раз может быть снижена точность измерений при строгом их уравнивании, чтобы получить результаты такой же точности, как и при приближенном уравнивании измерений со средней ошибкой m. При этом снижение точности понимается в смысле увеличения вероятности

$$P(|\Delta F'_{\text{стр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|),$$

где $\Delta F'_{\text{стр}}$ и $\Delta F_{\text{стр}}$ — истинные ошибки F при строгом уравнивании двух рядов измерений со средними ошибками $M_{\text{экв}}$ и m.

Очевидно, что показатели $M_{\text{экв}}$ и $P(|\Delta F_{\text{пр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|)$ тесно связаны между собою.

Преимуществом $M_{\text{экв}}$ и $P(|\Delta F_{\text{пр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|)$ следует считать их чувствительность к влиянию отступлений от строгого уравнивания. С другой стороны, оценка способа урав-

нивания по вероятности события $|\Delta F_{\text{пр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|$ непривычна для геодезистов. Показатели $M_{\text{экв}}$ и $P(|\Delta F_{\text{пр}}| > |\Delta F_{\text{стр}}|)$ лишь иначе освещают вопрос о качестве приближенных способов уравнивания и не противоречат применению формул (8), (9) и (11).

Новым является предложение С. Г. Могильного о вычислении предельной ошибки оцениваемой функции. Рассматривая конкретный случай, которому отвечают определенные значения свободных членов условных уравнений и условное математическое ожидание $M\{\Delta F_{\text{пр}}\} = \eta$, С. Г. Могильный использует доверительный интервал

$$\eta - tM_{F_{\text{стр}}} \leqslant \Delta F_{\text{пр}} \leqslant \eta + tM_{F_{\text{стр}}}, \tag{13}$$

отвечающий доверительной вероятности ω.

Интервалы (9) и (13) по своему статистическому смыслу принципиально различны [7]. Из (13) следует

$$(M_{F_{\text{пр}}})'_{\text{пред}} = |\eta| + t|M_{F_{\text{стр}}}|. \tag{14}$$

Когда оценка производится безотносительно от конкретного ряда измерений и η неизвестно, С. Г. Могильный предлагает вычислять предельную ошибку в расчете на наиболее невыгодную комбинацию свободных членов условных уравнений, принимая $\eta = \eta_{\text{пред}} = t\delta$.

Тогда

$$(M_{F_{\text{пр}}})'_{\text{пред}} = |\eta_{\text{пред}}| + t|M_{F_{\text{стр}}}|. \tag{15}$$

Очевидно, что значения предельных ошибок, полученные по формулам (9) и (15), имеют различный статистический смысл. Формула (9) дает значение предельной ошибки, определяющей интервал, который с заданной вероятностью ω накрывает истинную ошибку $\Delta F_{\text{пр}}$, а формула (15) дает наибольшее значение ошибки для доверительного интервала (13). Ошибку $(M_{F_{\text{пр}}})'_{\text{пред}}$ можно считать отвечающей наиболее невыгодному сочетанию свободных членов условных уравнений, при которой возможно наибольшее расхождение результатов приближенного и строгого уравнивания.

Для $(M_{F_{\text{пр}}})'_{\text{пред}}$, определенной по (14) или (15), возможно построение различных вероятностных характеристик и

доверительных интервалов. Например, для конкретного значения η можно вычислить вероятность появления $\Delta F_{\text{пр}} = (M_{F_{\text{пр}}})'_{\text{пред}}$ в некоторых небольших интервалах вблизи правой границы интервала (13) или определить доверительную вероятность, отвечающую симметричному интервалу,

$$-\{|\eta| + tM_{F_{\text{стр}}}\} \leqslant \Delta F_{\text{пр}} < \{|\eta| + tM_{F_{\text{стр}}}\}. \qquad (16)$$

Однако использование таких вероятностных характеристик едва ли целесообразно.

Таким образом, рекомендации отдельных авторов в части оценки приближенных способов уравнивания не противоречат друг другу. Одновременное использование различных показателей точности позволяет освещать вопрос с разных сторон и поэтому способствует углублению сравнительного анализа приближенных способов уравнивания маркшейдерско-геодезических измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Визгин А. А. Оценка точности приближенных методов уравнивания. «Геодезия и картография», № 1, 1958.
2. Конусов В. Г. О значении строгих и приближенных методов уравнивания. Изв. ВУЗов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 5, 1967.
3. Красовский Ф. Н. К оценке точности триангуляции. Избранные соч., т. II. Геодезиздат, 1956.
4. Могильный С. Г. Об оценке приближенных способов уравнивания геодезических измерений. Изв. ВУЗов «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 5, 1964.
5. Могильный С. Г. Об оценке результатов уравнивания маркшейдерско-геодезических измерений. Изв. ВУЗов Горн. журн., № 1, 1965.
6. Никифоров Б. И. Точность приближенных способов уравнивания. Тр. ВНИМИ, вып. XXII, 1950.
7. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. Гостехиздат, 1947.