

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУНКТОВ В СИСТЕМАХ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ТЕОДОЛИТНЫХ ХОДОВ

А. Н. Белоликов

Системы теодолитных ходов и полигонометрии 1 и 2 разрядов уравниваются упрощенным способом. Сначала совместно определяются поправки к углам, затем по исправленным углам вычисляются приращения координат, после чего раздельно уравниваются абсциссы и ординаты в системе ходов. Невязки отдельных ходов по осям координат распределяются по приращениям координат пропорционально длине сторон.

Веса ходов между узловыми точками при уравнивании абсцисс и ординат в последнее время обычно принимают обратно пропорциональными длине этих ходов

$$P_i = P_{x_i} = P_{y_i} = \frac{1}{[s]_i}. \quad (1)$$

До недавнего времени системы городской и инженерной полигонометрии уравнивались с весами ходов, которые вычислялись по формулам

$$P_i = P_{x_i} = P_{y_i} = \frac{1}{M_i^2} \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} P_{x_i} &= \frac{1}{M_{x_i}^2}; \\ P_{y_i} &= \frac{1}{M_{y_i}^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Средние квадратические ошибки ходов M_i , M_{x_i} и M_{y_i} вычисляются по известным формулам предварительного расчета с использованием центров тяжести.

Оценка точности уравненных координат пунктов на практике производится приближенным способом.

Вычисляются ошибки единицы веса по осям координат

$$\begin{aligned}\mu_x &= \pm \sqrt{\frac{[p_x v_x^2]}{r}}, \\ \mu_y &= \pm \sqrt{\frac{[p_y v_y^2]}{r}}\end{aligned}\quad (4)$$

и веса уравненных координат $P_{x_{ур}}$ и $P_{y_{ур}}$, после чего определяются средние квадратические ошибки координат

$$\begin{aligned}M_{x_{ур}} &= \frac{\mu_x}{\sqrt{P_{x_{ур}}}}; \\ M_{y_{ур}} &= \frac{\mu_y}{\sqrt{P_{y_{ур}}}}.\end{aligned}\quad (5)$$

Если веса ходов вычислены по (1), получим

$$\begin{aligned}\mu_x &= \pm \sqrt{\frac{[v_{x_i}^2]}{[s]_i} \cdot \frac{1}{r}}; \\ \mu_y &= \pm \sqrt{\frac{[v_{y_i}^2]}{[s]_i} \cdot \frac{1}{r}},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\text{где } P_{i_{ур}} = P_{x_i_{ур}} = P_{y_i_{ур}} = \frac{1}{[s]_{\text{экр}}}. \quad (7)$$

Согласно (5)

$$\begin{aligned}M_{x_{ур}} &= \mu_x \sqrt{[s]_{\text{экр}}}; \\ M_{y_{ур}} &= \mu_y \sqrt{[s]_{\text{экр}}}.\end{aligned}\quad (8)$$

При уравнивании сети методами узлов или полигонов [2] обратный вес $1:P_{i_{ур}}$ вычисляется в дополнительном столбце таблицы решения нормальных уравнений, а при применении способа эквивалентной замены $1:P_{i_{ур}}$ определяется попутно с уравниванием.

Ошибки, вычисленные по формулам (5), (8), как справедливо указывается в [4], являются приближенными и могут быть использованы лишь для некоторого общего суждения о порядке точности этих величин.

Исследования показывают, что ошибки, вычисленные по формулам (5) и (8), оказываются преуменьшенными и, следовательно, дают завышенную точность для уравненных координат пунктов полигонометрических и теодолитных ходов. Если такое завышение мало заметно в несвободных системах с несколькими исходными пунктами, где расстояния от исходных до оцениваемых пунктов относительно невелики, то оно ощутимо при уравнивании систем большой протяженности и в особенности свободных систем, часто встречающихся в подземных маркшейдерских опорных сетях. Этому способствует и неблагоприятное накопление ошибок в подземных ходах от влияния ошибок угловых измерений $m_\beta = 15-25''$.

Как известно, ошибка абсциссы конечной точки висячего хода произвольной формы от влияния ошибок измерения углов равна

$$M_{x\beta} = \pm \frac{m_\beta}{\rho} \sqrt{[R_y^2]}, \quad (9)$$

а в вытянутом ходе поперечная ошибка составляет

$$M_{y\beta} = \pm \frac{m_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{n+1,5}{3}}. \quad (10)$$

Следовательно, ошибки M_x и M_y растут почти пропорционально длине хода, но не пропорционально корню из длины, как это следует из формулы (8).

Поэтому вместо непосредственного вычисления по формуле (8) правильнее определять ошибки M_x и M_y следующим путем.

1. Вычисляются ошибки координат оцениваемого пункта i системы полигонометрических (теодолитных) ходов после уравнивания углов

$$M_{x\beta}^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left\{ [R_y R_y]_A^i - \frac{[a R_y]_A^i}{[aa]} - \frac{[b R_y]_1^2}{[bb]_1} - \dots \right\} + \mu^2 [s \cos^2 \alpha]_A^i; \quad (11)$$

$$M_{y\beta}^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left\{ [R_x R_x]_A^i - \frac{[a R_x]_A^i}{[aa]} - \frac{[b R_x]_1^2}{[bb]_1} - \dots \right\} + \mu^2 [s \sin^2 \alpha]_A^i.$$

Формулы (11) являются строгими, т. е. отвечающими уравнению углов системы по способу наименьших квадратов.

2. Определяется $P_{i \text{ ур}}$ в соответствии с (7).

3. Вычисляются ошибки координат по формулам

$$\begin{aligned} M_{x \text{ ур}} &= M_{x\beta} \sqrt{\frac{[s]_{\text{эКВ}}}{[s]_A^i}}; \\ M_{y \text{ ур}} &= M_{y\beta} \sqrt{\frac{[s]_{\text{эКВ}}}{[s]_A^i}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) вытекают из (8) и (11). Величина $\frac{1}{P_{i \text{ ур}}} = [s]_{\text{эКВ}}$ выражает длину условного хода, эквивалентного данной системе при вычислении уравненных координат пункта i , а величина $[s]_A^i$ — длину хода $A-1-2-\dots-i$ от исходного пункта A до оцениваемого i .

Для пояснения структуры формулы (12) обратимся к формулам (8) и умножим подкоренные выражения на

$$\frac{[s]_A^i}{[s]_A^i} = 1,$$

после чего их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{x \text{ ур}} &= \mu_x \sqrt{[s]_A^i} \sqrt{\frac{[s]_{\text{эКВ}}}{[s]_A^i}}; \\ M_{y \text{ ур}} &= \mu_y \sqrt{[s]_A^i} \sqrt{\frac{[s]_{\text{эКВ}}}{[s]_A^i}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если вместо величин $\mu_x \sqrt{[s]_A^i}$ и $\mu_y \sqrt{[s]_A^i}$, которые правильно выражают закономерность накопления ошибок в полигонометрическом ходе, подставить ошибки $M_{x\beta}$ и $M_{y\beta}$, вычисленные по формуле (11), то получим (12), т. е. решим задачу оценки точности значительно точнее, чем по формуле (8).

Приближенность формул (12) объясняется тем, что величины $[s]_{\text{эКВ}}$ и $[s]_A^i$ не отражают влияния формы полигонов на величину ошибок по осям координат и неточно определяют веса координат. Другими словами, для систем полигонов разной формы, но одинаковых периметров величины $[s]_{\text{эКВ}}$ и $[s]_A^i$ одинаковы, хотя ошибки уравненных координат различны.

Для выяснения пределов применимости формул (5), (8), (12) и для других исследований более правильным способом определения средних квадратических ошибок координат пунктов в системах, уравненных одним из методов раздельного уравнивания, будет вычисление их по общей формуле

$$\begin{aligned} M_{x_{yp}}^2 &= \left\{ \left[\left(\frac{\partial x_{yp}}{\partial \beta_i} \right)^2 m_{\beta}^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial x_{yp}}{\partial s_i} \right)^2 m_{s_i}^2 \right] \right\}; \\ M_{y_{yp}}^2 &= \left\{ \left[\left(\frac{\partial y_{yp}}{\partial \beta_i} \right)^2 m_{\beta}^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial y_{yp}}{\partial s_i} \right)^2 m_{s_i}^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Представим x_{yp} и y_{yp} в виде

$$\begin{aligned} x_{yp} &= x + v_{\beta}^x + v_{\Delta x}^x, \\ y_{yp} &= y + v_{\beta}^y + v_{\Delta y}^y, \end{aligned} \quad (15)$$

где v_{β}^x и v_{β}^y — поправки к координатам оцениваемого пункта после уравнивания и исправления углов системы; $v_{\Delta x}^x$ и $v_{\Delta y}^y$ — поправки после уравнивания приращений абсцисс и ординат.

Поправки v_{β}^x и v_{β}^y не определяются при уравнивании, но частные производные от

$$\begin{aligned} x_{\beta} &= x + v_{\beta}^x, \\ y_{\beta} &= y + v_{\beta}^y, \end{aligned} \quad (16)$$

а, следовательно, и обратный вес функций x_{β} и y_{β} могут быть определены попутно с уравниванием углов по (11). Поправки $v_{\Delta x}^x$ и $v_{\Delta y}^y$ следует выразить через коррелаты, а затем через свободные члены нормальных уравнений, после чего определение частных производных от них по β и s не представляет больших трудностей. Выражения коррелат через невязки w_x и w_y в общем виде производятся в дополнительном столбце таблицы решения нормальных уравнений.

Поправки $v_{\Delta x}^x$ и $v_{\Delta y}^y$ будут равны

$$\begin{aligned} v_{\Delta x}^x &= -(\alpha_1 w_1^x + \alpha_2 w_2^x + \dots + \alpha_n w_n^x); \\ v_{\Delta y}^y &= -(\beta_1 w_1^y + \beta_2 w_2^y + \dots + \beta_n w_n^y), \end{aligned} \quad (17)$$

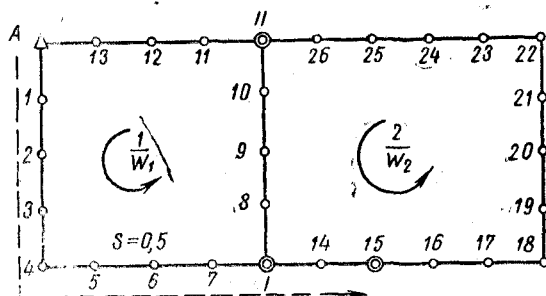
причем коэффициенты α_i и β_i определяются так же, как и при вычислении численных значений поправок $v_{\Delta x}^x$ и $v_{\Delta y}^y$ при уравнивании системы из n полигонов.

Таким образом, ошибки координат уравненного пункта будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} M_{x_{уф}}^2 &= \left[\left(\frac{\partial x_{\beta}}{\partial \beta_i} + \frac{\partial v_{\Delta x}^x}{\partial \beta_i} \right)^2 \right] \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} + \mu^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s_i} + \frac{\partial v_{\Delta x}^x}{\partial s_i} \right)^2 \rho_i \right]; \\ M_{y_{уф}}^2 &= \left[\left(\frac{\partial y_{\beta}}{\partial \beta_i} + \frac{\partial v_{\Delta y}^y}{\partial \beta_i} \right)^2 \right] \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} + \mu^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial s_i} + \frac{\partial v_{\Delta y}^y}{\partial s_i} \right)^2 \rho_i \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем применение формул (12) и (18) на примере оценки точности абсциссы пункта 15 относительно исходных в системе полигонов (рисунок), уравненной способом В. В. Попова.

1. Попутно с решением системы уравнений, составленных для уравнивания углов, в табл. 1 по формуле (11) определяются $\frac{1}{P_{\beta 15}}$ и условные ординаты центров тяжести y'_{01} и y'_{02} в полигонах 1 и 2, соответствующие уравниванию углов.



Система полигонов

2. Вычисляются условные центральные ординаты системы $\eta_i = y_i - y_0$

$$\eta'_4 = \eta'_1 = \dots = \eta'_4 = 0 - 1,4 = -1,4;$$

$$\eta'_5 = +0,5 - 1,4 = -0,9;$$

$$\eta'_6 = +1,0 - 1,4 = -0,4;$$

$$\eta'_{14} = 0,5 - 1,6 = -1,1;$$

$$\eta'_{15} = 1,0 - 1,6 = -0,6$$

и. т. д.

Таблица 1

x_1	x_2	f	$\Sigma y'$
16,0 -1,00	-4,0 +0,25	-21,5 +1,34	+16,0 -1,00
	+18,0 +17,0 -1,00	-1,0 -6,4 +0,37	+22,5 +26,5 -1,56
	$+58$ $\frac{1}{P_{\beta 15}} = 27,5;$ $y'_{01} = +1,39; \quad y'_{0,2} = +1,56.$		

3. Попутно с решением нормальных уравнений при уравнивании приращений абсцисс в дополнительном столбце табл. 2 выполняется выражение коррелят через невязки w^x в общем виде и выражение поправок $v_{\Delta x}^x$ через невязки.

Таблица 2

k_1^x	k_2^x	w_x	f_s
+8,0 -1,00	-2,0 +0,25	+ w_1 $-\frac{w_1}{8}$	+ 4,0 - 0,5
	+9,0 +8,5 -1,00	+ w_2 $w_2 + 0,25 w_1$ $-\frac{w_2}{8,5} - 0,029 w_1$	+1,0 +2,0 -0,24
		+5,0	
		$[s]_{\text{экр}} = +2,53$ $k_2 = -0,117 w_2 - 0,029 w_1;$ $k_1 = -0,029 w_2 - 0,132 w_1;$ $v_{\Delta x}^x = 4k_1 + k_2 = -0,56 w_1 - 0,24 w_2.$	
		(19)	

Как видно из (19), выражение поправок v^x и v^y через свободные члены w не встречает трудностей.

4. В соответствии с (19) и (18) можно написать

$$M_{x15}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{P_{\beta15}} + (0,56)^2 \sum_1 \eta_i'^2 + (0,24)^2 \sum_2 \eta_i'^2 - 2 \cdot 0,56 \sum_1 R_i \eta_i' - \right. \\ \left. - 2 \cdot 0,24 \sum_2 R_i \eta_i' + 2 \cdot 0,56 \cdot 0,24 \sum \eta_i' \eta_i' \right\} + \\ + \mu^2 \{0,39 + 0,20 + 0,11\},$$

или

$$M_{x15}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \{27,5 + 9,4 + 0,5 - 25,0 - 0,6 + 0,3\} + \mu^2 \cdot 0,70 = \\ = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} 12,1 + \mu^2 0,70. \quad (20)$$

Подсчитаем также по формуле (12)

$$M_{x15}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} \left\{ 27,5 \cdot \frac{2,53}{5,00} \right\} + \mu^2 \left\{ 2 \frac{2,53}{5,00} \right\} = \frac{m_{\beta}^2}{\rho^2} 13,9 + \mu^2 1,0. \quad (21)$$

Из сравнения полученных величин 12,1 и 13,9 при $\frac{m_{\beta}^2}{\rho^2}$ и 0,70 и 1,0 при μ^2 видна близость результатов, однако по данному примеру нельзя делать вывод, что формулы (12) и (18) всегда дают почти одинаковые результаты. Более правильной является формула (18), но применять ее на практике нецелесообразно ввиду громоздкости вычислений.