Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LX, вып. 1, 1970 г.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

К. Г. Асатур

В настоящей статье с помощью метода И. Г. Бубнова — Б. Г. Галеркина рассмотрен устанавливающийся (переходный к статическому) процесс деформации упругого полупространства от приложенной к его поверхности мгновенно и в дальнейшем во времени не меняющейся, ассимптотически убывающей от центра, осесимметрично распределенной нормальной нагрузки — p.

В основном поставлена цель определить смещение граничной поверхности полупространства в направлении, ей перпендикулярном, что связано с энергетическими расчетами от действия нагрузки типа давления струи на массив.

Уравнения Ляме для динамической задачи в цилиндрических координатах z, r, Θ, если пренебречь гравитационными силами, имеют вид

$$\Delta U + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \operatorname{div} \vec{\Omega}}{\partial r} - \frac{U}{r^2} = \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\Delta W + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \operatorname{div} \vec{\Omega}}{\partial z} = \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где U, W — компоненты вектора смещения $\vec{\Omega}$ по r и z; t — время; ρ — плотность; G — модуль упругости при сдвиге; ν — коэффициент Пуассона для данного полупространства;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + D\frac{\partial}{\partial r}; \quad D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \operatorname{div}\vec{\Omega} = \frac{\partial W}{\partial z} + DU.$$

Уравнения (1), (2) простыми преобразованиям приводятся к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}DU + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z} = \\ = \frac{\rho}{G}\cdot\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}D\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}DU = \\ = \frac{\rho}{G}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{4}$$

В этих уравнениях компоненты смещений U, W могут быть расщеплены; для этого надо от выражения (3) взять операцию $\frac{\partial}{\partial z}D$ и затем подставить в него из уравнения (4) значение $\frac{\partial}{\partial z}DU$, далее над формулой (4) совершить операцию $\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}$ и подставить в равенство (4) из равенства (3) значение $\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial r}$, после чего получим

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial}{\partial r}D\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}D\frac{\partial}{\partial r}DU = \\ = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}D\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\beta\rho}{G}\cdot\frac{\partial^4 U}{\partial t^4}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + 2D\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + D\frac{\partial}{\partial r}D\frac{\partial}{\partial r}W = \\ = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}D\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\beta\rho}{G}\cdot\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}, \tag{6}$$

где $\alpha = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\rho}{G}$; $\beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\rho}{G}$.

Частный вид уравнений (5), (6) для статической задачи известен.*

Ниже задача решается в виде двух слагаемых: статического и зависящего от времени, т. е.

* Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд-во «Высшая школа», 1968.

$$U = u_c + u(t), \tag{7}$$

$$W = w_c + w(t). \tag{8}$$

Предполагается, что статические слагаемые u_c, w_c для заданного распределения нагрузки могут быть найдены заранее.

Физический смысл подобного рассмотрения задачи, обычного для устанавливающихся процессов, в данном случае состоит в следующем. Начальное нулевое напряженно-деформированное состояние полупространства складывается из действия двух обратно направленных равных по величине нагрузок: при $t \leqslant 0$ $u(t) = -u_c = \text{const}$ и $w(t) = -w_c = \text{const}$; далее при $t = 0$ обратная нагрузка p скачкообразно снимается; тогда функции $u(t)$ и $w(t)$ при $t \geqslant 0$ определяют собой динамические слагаемые компонентов смещения. Поэтому для $u(t)$ и $w(t)$ начальные условия представятся в виде

$$u|_{t=0} = -u_c; \quad w|_{t=0} = -w_c. \tag{9}$$

Для касательных напряжений, все время равных нулю, граничные условия

$$\tau_{rz}|_{z=0} = G\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \tag{10}$$

а для нормальных напряжений при $t > 0$

$$\sigma_z|_{z=0} = G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} Du\right]_{z=0} = 0. \tag{11}$$

В качестве определяющей нагрузку примем функцию

$$p = \frac{Pr_*}{2\pi}\left\{\frac{\omega_1\delta_1}{[(\omega_1 r_*)^2 + r^2]^{3/2}} - \frac{\omega_2\delta_2}{[(\omega_2 r_*)^2 + r^2]^{3/2}}\right\}, \tag{12}$$

где $\delta_2 = \delta_1 - 1$; $\dfrac{\delta_1}{\omega_1^2} - \dfrac{\delta_2}{\omega_2^2} = 1$.

Эта функция удовлетворяет условиям

$$2\pi \int_0^\infty prdr = P; \quad p_0 = p\Big|_{r=0} = \frac{P}{2\pi r_*^2}, \tag{13}$$

причем на коэффициенты δ_1, δ_2, ω_1, ω_2 накладываются дополнительные требования, определяющие наилучшую аппроксимацию функции распределения нагрузочной кривой. Так,

для функции давления параметром r_* подходят значения $\delta_1=1{,}2$; $\omega_1=0{,}4$ и $\delta_2=0{,}2$; $\omega_2=0{,}175$, дающие при $r=2{,}85\,r_*$ значение $p=0{,}02\,p_0$. Наипростейший вид функции типа (12) получится, если принять $\delta_1=1$; $\omega_1=1$. В дальнейшем для величин, результаты нагрузки для которых являются суммируемыми, будут приводиться данные только для одного члена функции (12) без индексов с обозначением $r_0=\omega r_*$. Для такой нагрузки статическое решение было получено в виде функций *

$$u_c=\frac{P}{4\pi G}\int_0^\infty A_c(z)\,J_1(kr)\,dk; \tag{14}$$

$$w_c=\frac{P}{4\pi G}\int_0^\infty B_c(z)\,J_0(kr)\,dk, \tag{15}$$

где $A_c=[kz-(1-2\nu)]\,e^{-k(z+r_0)}$; $B_c=[kz+2(1-\nu)]\,e^{-k(z+r_0)}$.

Поставленную задачу можно решить, применив интегралы Фурье—Бесселя

$$u=-\frac{P\delta}{4\pi G}\int_0^\infty A(z,\,t)\,J_1(kr)\,dk;\quad (A|_{t=0}=A_c), \tag{16}$$

$$w=\frac{P\delta}{4\pi G}\int_0^\infty B(z,\,t)\,J_0(kr)\,dk;\quad (B|_{t=0}=B_c), \tag{17}$$

что для функций A и B в предположении возможности их четырехкратного дифференцирования под знаком интеграла приводит (см. выражения (3), (4), (10), (11) к следующей предельной задаче:

$$L_1(A)=L(A)-\frac{0{,}5\,k}{1-\nu}\cdot\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial^2 z^2}-$$

$$-k^2A-\beta\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}-\frac{0{,}5\,k}{1-\nu}\frac{\partial B}{\partial z}=0, \tag{18}$$

---

* Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого пространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, вып. 24, № 149, 1951.

$$L_2(B) = \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k^2 B - \beta \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \frac{0{,}5k}{1-\nu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

с граничными уравнениями

$$\left[\frac{1-\nu}{\nu} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} + kA\right]_{z=0} = 0, \quad (20)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial z} - kB\right]_{z=0} = 0. \quad (21)$$

Легко видеть, что если в формулы (16), (17) подставить

$$A = (kz + kat + M)\exp[-k(z + nt + r_0)] - Qknt\exp[-k(nt + r_0)] - A_2, \quad (22)$$

$$B = (kz + kbt + N)\exp[-k(z - nt + r_0)] - ckat\exp[-k(nt + r_0)], \quad (23)$$

где $A_2 = Q\exp\left[-\left(\frac{z}{nt}\right)^2\right]\exp[-k(nt + r_0)]$;

$$Q = -\frac{1-2\nu}{\nu}; \quad M = -(1-2\nu); \quad N = 2(1-\nu);$$

$$c = 1 + \frac{\nu}{1-\nu}\left(1 - \frac{n}{a}Q\right),$$

в которых

$$\frac{b}{n} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{a}{n} - Q\right) \quad (24)$$

и которые допускают многократное дифференцирование под знаком интеграла, то в данной задаче будут удовлетворены начальные условия и граничные уравнения, причем a, b и n — постоянные. Тогда, применяя метод И. Г. Бубнова — Б. Г. Галеркина, можно подставить зависимости (22), (23) в уравнения

$$\int_0^\infty \int_0^\infty A_1 L_1(A)\, dzdt = 0; \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty B_1 L_2(B)\, dzdt = 0, \quad (26)$$

где $A_1 = kat\exp[-k(z + nt + r_0)]$;

$$B_1 = kbt \exp\left[-k(z + nt + r_0)\right].$$

Отсюда следующие уравнения для определения a, b и n:

$$2\left(\beta n^2 - \frac{0{,}5}{1-\nu}\right)\frac{a}{n} + \frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{b}{n} - 4\frac{1-2\nu}{\nu} - \beta n^2\frac{4\nu^2 + 7\nu - 4}{\nu} + \varphi(n) = 0, \tag{27}$$

где $\varphi(n) = 16n^2\int_0^\infty\int_0^\infty k^2 L(A_2)\, t \exp\left[-k\left[z + nt - r_0\right)\right] dzdt;$

$$2\left(\beta n^2 + \frac{0{,}5}{1-\nu}\right)\frac{b}{n} + \frac{3 - 4\beta n^2}{1-\nu}\cdot\frac{a}{n} + 4\frac{1-2\nu}{1-\nu} - \beta n^2\frac{4\nu^2 - 17\nu + 9}{1-\nu} + \frac{8n^2}{1-\nu}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial A_2}{\partial z} k^2 t \times \exp\left[-k(z + nt - r_0)\right] dzdt = 0; \tag{28}$$

$$\frac{b}{n} - \frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{a}{n} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}. \tag{29}$$

Заметим, что искомые коэффициенты a, b и n зависят только от констант породы и представляются в форме волновых скоростей

$$a = a_0(\nu)\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad b = b_0(\nu)\sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad n = n_0(\nu)\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{30}$$

и значит

$$\frac{a}{n} = \frac{a_0}{n_0} = \chi_a(\nu); \quad \frac{b}{n} = \frac{b_0}{n_0} = \chi_b(\nu). \tag{31}$$

Следовательно, уравнения (27), (28), (29) будут решаться для каждого заданного значения ν.

Ограничиваясь в дальнейшем принятой степенью приближения для функций $U(z, r, t)$ и $W(z, r, t)$, окончательно получим

$$U = \frac{P_0}{4\pi G}\left\{\frac{rz}{\left[(z+r_0)^2 + r^2\right]^{3/2}} - (1-2\nu)\left[\frac{1}{r} - \frac{z + r_0}{r\sqrt{(z+r_0)^2 + r^2}}\right] - \frac{r(z + \chi_a nt)}{\left[(z + r_0 + nt)^2 + r^2\right]^{3/2}} + (1-2\nu)\left[\frac{1}{r} - \frac{z + r_0 + nt}{r\sqrt{(z+r_0+nt)^2 + r^2}}\right] -$$

$$- \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot \frac{rnt}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{1-2\nu}{\nu} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{z}{nt}\right)^2\right]\left[\frac{1}{r} - \frac{nt+r_0}{r\sqrt{(nt+r_0)^2+r^2}}\right]\Bigg\}; \qquad (32)$$

$$W = \frac{P\delta}{4\pi G}\left\{\frac{(z+r_0)\,z}{[(z+r_0)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{(z+r_0)^2+r^2}} - \right.$$
$$- \frac{(z+r_0+nt)\,(z+\chi_b nt)}{[z+r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}} + \frac{c\,(r_0+nt)\,\chi_a\,nt}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}} -$$
$$\left. - \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{(z+r_0+nt)^2+r^2}}\right\}. \qquad (33)$$

Если учесть, что модуль упругости

$$E = 2(1+\nu)\,G, \qquad (34)$$

для смещения на оси симметрии $(r=0)$, имеем

$$W|_{r=0} = \frac{P\delta(1+\nu)}{2\pi E}\left[\frac{z}{(z+r_0)^2} + \frac{2(1-\nu)}{z+r_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{z+\chi_b nt}{(z+r_0+nt)^2} + \frac{c\chi_a nt}{(r_0+nt)^2} - \frac{2(1-\nu)}{z+r_0+nt}\right]. \qquad (35)$$

Смещения на поверхности полупространства $z=0$ будут

$$W|_{z=0} = W_* = \frac{P\delta(1+\nu)}{2\pi E} \times$$
$$\times\left\{\frac{2(1-\nu)}{\sqrt{r_0^2+r^2}} - \frac{(r_0+nt)(\chi_b - c\chi_a)\,nt}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}} - \frac{2(1-\nu)}{\sqrt{(r_0-nt)^2+r^2}}\right\}. \qquad (36)$$

Скорость смещения поверхности $z=0$

$$V = \frac{\partial W_*}{\partial t} = \frac{P\delta(1+\nu)}{2\pi E}\left\{-\frac{(r_0+2nt)\,n(\chi_b - c\chi_a)}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{3(r_0+nt)^2 n^2(\chi_b - c\chi_a)}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{5/2}} + \frac{2(1-\nu)(r_0+nt)\,n}{[(r_0+nt)^2+r^2]^{3/2}}\right\}. \qquad (37)$$

Начальная $(t=0)$ скорость смещения поверхности $z=0$

$$V_0 = \frac{P\delta}{2\pi E} \cdot \frac{(1+\nu)\,r_0 n\,[2(1-\nu) - \chi_b + c\chi_a]}{(r_0^2+r^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{P(1+\nu)\,n\,[2(1-\nu) - (\chi_b - c\chi_a)]}{E}, \qquad (38)$$

конечная скорость $(t=\infty)$ стремится к нулю.

Из формулы (38) следует, что функция скорости движения поверхности полупространства в точках приложения нормальной нагрузки в начальный момент $V_0(r)$ отличается от функции давления $p(r)$ постоянным множителем.

С помощью деформаций, формул (32), (33), могут быть найдены напряжения. Так, для максимального скалывающего напряжения в точках на оси z

$$\tau = G\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\Big|_{r=0}. \tag{39}$$

Решив совместно уравнения $\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$, найдем, что у τ есть точка максимума $t = \infty$, $z = z_0$; положение этой точки z_0 зависит от вида функции (12); в частности, для случая $\delta_1 = \omega_1 = 1$ она получится на глубине от поверхности

$$z_0 = \frac{2(1+\nu) r_*}{7 - 2\nu}. \tag{40}$$

Работа $R(t)$, совершенная силой P к моменту времени t, определится с помощью формулы (36). Поскольку работа эта для отдельных слагаемых функций (12) суммироваться не может, приведем ее для полного вида этой функции

$$R(t) = 2\pi \int_0^{\infty} p W_* r dr, \tag{41}$$

где $p = p_1 + p_2$; $W_* = W_{*1} + W_{*2}$.

Индексы у величин p и W_* выделяют те их значения, которые получаются от нагрузочных членов в уравнении (12), отмеченных такими же индексами.

Выполнив интегрирование в формуле (41), получим

$$R(t) = \frac{P^2(1-\nu)^2}{\pi E r_*}\left\{\frac{\delta_1^2}{2\omega_1} + \frac{\delta_2^2}{2\omega_2} - \frac{2\delta_1\delta_2}{\omega_1+\omega_2} - \frac{\delta_1^2}{2\omega_1 + \frac{nt}{r_*}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_2^2}{2\omega_2 + \frac{nt}{r_*}} + \frac{2\delta_1\delta_2}{\omega_1+\omega_2+\frac{nt}{r_*}} - \left[\frac{\delta_1^2 \frac{nt}{r_*}(\chi_b - c\chi_a)}{\left(2\omega_1 + \frac{nt}{r_*}\right)^2} + \right.\right.$$

$$+\frac{\delta_2^2\frac{n}{r^*}(\chi_b-c\chi_a)\,t}{\left(2\omega_2+\frac{nt}{r_*}\right)^2}-\frac{2\delta_1\delta_2\frac{nt}{r_*}(\chi_b-c\chi_a)}{\left(\omega_1+\omega_2+\frac{nt}{r_*}\right)}\Bigg]\frac{0{,}5}{1-\nu}. \qquad (42)$$

В формуле (42) после достижения массивом статического состояния ($t=\infty$) останутся только первые три члена. Полученная в пределе работа R_0 силы P будет в два раза больше работы R_c той же силы, приложенной статически.

Но R_c есть работа деформации, полностью преобразующаяся в потенциальную энергию полупространства. Следовательно, остальная половина работы R_0 превращается в кинетическую энергию полупространства, вовлекаемая в движение масса которого с ростом t беспредельно увеличивается, а скорость, падая, стремится к нулю. Фактически избыток энергии в физическом массиве поглощается трением при затухании распространяющегося волнового процесса.