Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. LXI, вып. 2, 1971 г.

ВЛИЯНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ВОД НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГЕОТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ПОСЛЕ БУРЕНИЯ СКВАЖИНЫ

О. Ф. Путиков

В проницаемых горных породах может наблюдаться естественная фильтрация пластовых вод, соответствующая их движению из области питания к области разгрузки. Если скважина пересекает такие породы, то это явление влияет на температурный режим среды в ней.

Ниже исследуется влияние фильтрации пластовых вод в плоскости, перпендикулярной оси скважины, на восстановление температурного режима в последней после бурения. Если предположить, что среда однородна, т. е. теплофизические свойства среды в скважине и горных породах одинаковы, то распределение температуры t подчиняется уравнению

$$\nabla^2 t - \frac{(\vec{v}\nabla t)}{a_1} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{Q}{\lambda} = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ — скорость фильтрации пластовых вод; a — коэффициент температуропроводности пород; $\lambda = c\sigma a$ — коэффициент теплопроводности пород; c — удельная теплоемкость пород; σ — плотность пород; $a_1 = \frac{\lambda}{c_1}$ — отношение суммарного коэффициента теплопроводности к объемной теплоемкости передвигающейся жидкости c_1; Q — мощность источников тепла; τ — время.

Вообще же, предположение об однородности или одинаковости теплофизических свойств среды в скважине и горных породах неверно, так как среда в скважине — жидкость, а горные породы — пористое тело, насыщенное жидкостью. Однако во многих случаях длительного бурения или сравнительно продолжительной выстойки после бурения предположение об однородности, как показывают расчеты, приближенно соблюдается. Это объясняется тем, что основная часть зоны нарушения термического режима в указанных случаях приходится на породы и незначительная часть — на объем скважины. При этом за теплофизические характеристики всей среды можно принять характеристики горных пород.

Если ввести ортогональную систему координат с осью z, совпадающей с осью скважины, и предположить, что скорость фильтрации имеет только одну составляющую v, направленную по оси x, а температура для пласта бесконечной мощности не зависит от z, то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \frac{v}{a_1} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{Q}{\lambda} = 0. \qquad (2)$$

Предположение, что скорость фильтрации имеет только одну составляющую, соответствует предположению об однородности среды.

Если в начале координат поместить точечный мгновенный источник мощностью q, то

$$Q = q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(\tau),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, определяемая соотношениями

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Тогда уравнение (2), соответственно, примет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \frac{v}{a_1}\,\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(\tau)}{\lambda} = 0. \tag{3}$$

Будем считать, что в начальный момент времени температура была нулевой

$$t|_{\tau=0} = 0 \tag{4}$$

и на бесконечности она убывает до нуля

$$t|_{x^2+y^2\to\infty} \to 0. \tag{5}$$

Для решения уравнения (3) при заданных начальных и граничных условиях (4) и (5) используем (в предположении применимости) интегральное преобразование Фурье по y. Если обозначить

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x,\ y,\ \tau)\, e^{-i\omega y} dy,$$

где ω — действительный параметр, или с учетом четности температуры $t(x,\ y,\ \tau)$ относительно y

$$F = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t(x,\ y,\ \tau)\cos\omega y dy,$$

и воспользоваться свойствами интеграла от дельта-функции, то выражение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{v}{a_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{a}\,\frac{\partial F}{\partial \tau} - \omega^2 F + \frac{q\delta(x)\,\delta(\tau)}{\lambda\sqrt{2\pi}} = 0. \tag{6}$$

Применяя в формуле (6) преобразование Лапласа по τ, с учетом выражения (4) получим

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \frac{v}{a_1}\,\frac{d\Phi}{dx} - \left(\omega^2 + \frac{p}{a}\right)\Phi + \frac{q\delta(x)}{\lambda\sqrt{2\pi}} = 0, \tag{7}$$

где $\Phi(p) = \int_0^{\infty} F(x,\ \tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau$; p — комплексная переменная.

Наличие дельта-функции в уравнении (7) приводит к тому, что в точке $x = 0$ производная $\frac{d\Phi}{dx}$ терпит разрыв, причем [1]

$$\left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=-0} - \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=+0} = \frac{q}{\lambda\sqrt{2\pi}}. \tag{8}$$

В связи с этим решение уравнения (7) можно записать в виде

$$\Phi = \Phi_1 = Ae^{-x\left(\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}-\frac{v}{2a_1}\right)} \quad \text{при } x \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\Phi = \Phi_2 = Be^{x\left(\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}+\frac{v}{2a_1}\right)} \quad \text{при } x \leqslant 0, \tag{10}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Определяя A и B из условия (8) и условия непрерывности функции Φ в точке $x = 0$

$$\Phi_1|_{x=0} = \Phi_2|_{x=0}, \tag{11}$$

получим окончательно

$$\Phi_1 = \frac{q}{\lambda\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x\left(\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}-\frac{v}{2a_1}\right)}}{2\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}}, \tag{12}$$

$$\Phi_2 = \frac{q}{\lambda\sqrt{2\pi}} \frac{e^{x\left(\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}+\frac{v}{2a_1}\right)}}{2\sqrt{\frac{v^2}{4a_1^2}+\omega^2+\frac{p}{a}}}. \tag{13}$$

Применяя к уравнениям (12) и (13) обратное преобразование Лапласа и используя теорему смещения и табличные формулы операционного исчисления [1], находим

$$F_1 = F_2 = F = \frac{q}{2\lambda\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}}\, e^{-\left(\frac{v^2a}{4a_1^2}\tau+\frac{x^2}{4a\tau}+a\omega^2\tau\right)} e^{x\frac{v}{2a_1}} \tag{14}$$

Температуру найдем, применяя к F обратное косинус-преобразование Фурье,

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\omega)\cos\omega y d\omega,$$

что, с учетом интеграла

$$\int_0^\infty e^{-a\tau\omega^2}\cos\omega y d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a\tau}}\, e^{-\frac{y^2}{4a\tau}}$$

дает

$$t = \frac{q}{4\lambda\pi\tau} e^{x\frac{v}{2a_1}-\frac{v^2a}{4a_1^2}\tau-\frac{x^2+y^2}{4a\tau}} \tag{15}$$

Эта формула определяет температуру от мгновенного источника, помещенного в начале координат $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Чтобы выяснить влияние фильтрации вод со скоростью v вдоль оси x на изменение заданной в начальный момент температуры $t_1 = f(x, y)$ однородной среды, необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} - \frac{v}{a_1}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial x} - \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial\tau} = 0 \tag{16}$$

при начальном условии

$$t_1|_{\tau=0} = f(x,\ y). \tag{17}$$

Поставленную задачу можно решить методом источников [2], используя уже имеющееся выражение (15). Для этого необходимо записать выражение температуры от мгновенного источника, расположенного в точке $x_1 = \xi$, $y_1 = \eta$, мощностью $\frac{q}{c\sigma} = f(\xi,\ \eta)$, т. е.

$$t = \frac{f(\xi,\ \eta)}{4\pi a\tau} e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau - \left[\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a\tau} - \frac{v}{2a_1}(x-\xi)\right]}$$

и проинтегрировать это выражение по ξ и η в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$t_1 = \frac{e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau}}{4\pi a\tau} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\ \eta)\, e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a\tau} - \frac{v}{2a_1}(x-\xi)\right]} d\xi d\eta. \tag{18}$$

Метод источников, вообще говоря, применялся ранее для решения задач теплопроводности в непроницаемых телах, когда $v = 0$ [2, 3]. Поэтому необходимо проверить, что выражение (18) действительно является решением данной граничной задачи.

То, что функция (18) удовлетворяет уравнению (16), можно проверить непосредственной подстановкой. Чтобы убедиться, что функция t_1, даваемая формулой (18), удовлетворяет начальному условию (17), введем новые переменные u и w следующими соотношениями:

$$\xi = x + 2\sqrt{a\tau}\, u,$$
$$\eta = y + 2\sqrt{a\tau}\, w.$$

Тогда формула (18) дает

$$t_1 = \frac{e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + 2\sqrt{a\tau}\, u;\ y + 2\sqrt{a\tau}\, w\right) e^{-\left(u^2+w^2+\frac{v}{a_1}\sqrt{a\tau}\, u\right)} du dw.$$

Следовательно, при $\tau \to 0$ получаем

$$t_1|_{\tau\to 0} \to \frac{f(x,\ y)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+w^2)} du dw = f(x,\ y).$$

Таким образом, функция (18), действительно, является решением задачи.

Рассмотрим два частных случая начальных распределений температуры, встречающихся в практике и исследованных в литературе.

В первом случае, который соответствует небольшим значениям времени бурения, предполагается, что начальная температура в скважине радиуса r_0 постоянна и равна T_0, а начальная температура пород равна нулю [4]

$$t_1|_{\tau=0} = f(x,\ y) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant r_0^2 \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r_0^2 \end{cases} \tag{19}$$

Полагая при этом

$$x = r\cos\varphi, \quad \xi = r'\cos\varphi',$$
$$y = r\sin\varphi, \quad \eta = r'\sin\varphi',$$

функцию (18) можно записать иначе

$$t_1 = \frac{T_0 e^{-\left[\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau \quad \frac{r^2}{4a\tau} - \frac{vr}{2a_1}\cos\varphi\right]}}{4\pi a\tau} \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} e^{-\left[\frac{r'^2}{4a\tau} + \frac{v}{2a_1}r' \quad s\varphi' - 2rr'\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{4a\tau}\right]} r'dr'd\varphi' \tag{20}$$

Откуда при φ 0 имеем

$$t_{1_1} = \frac{T_0}{4\pi a\tau} e^{-\left(\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau + \frac{r^2}{4a\tau} - \frac{vr}{2a_1}\right)} \int_0^{r_0} e^{-\frac{r'^2}{4a\tau}} \left[\int_0^{2\pi} e^{-\left(\frac{vr'}{2a_1} - \frac{rr'}{2a\tau}\right)\cos\varphi'} d\varphi'\right] r'dr'$$

$$= \frac{T_0}{2a\tau} e^{-\left(\frac{v^2 a\tau}{4a_1^2} + \frac{r^2}{4a\tau} - \frac{vr}{2a_1}\right)} \int_0^{r_0} e^{-\frac{r}{4a\tau}} I_0\left[\left(\frac{v}{2a_1} - \frac{r}{2a\tau}\right)r'\right] r'dr'$$

где $I_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Если обозначить $\varphi_1(r, \tau) = \frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau + \frac{r^2}{4a\tau} - \frac{vr}{2a_1}$ и $\beta_1 = \frac{v}{2a_1} - \frac{r}{2a\tau}$, то выражение для температуры при $\varphi = 0$ запишется в виде

$$t_{1_1} = \frac{T_0}{2a\tau} e^{-\varphi_1(r, \tau)} \int_0^{r_0} e^{-\frac{r'^2}{4a\tau}} I_0(\beta_1 r') r'dr' \tag{21}$$

При $\varphi = \pi$ аналогично получим

$$t_{1_2} = \frac{T_0}{2a\tau} e^{-\varphi_2(r, \tau)} \int_0^{r_0} e^{-\frac{r'^2}{4a\tau}} I_0(\beta_2 r') r'dr' \tag{22}$$

где $\varphi_2(r, \tau) = \frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau + \frac{r^2}{4a\tau} + \frac{vr}{2a_1}$; $\beta_2 = \frac{v}{2a_1} + \frac{r}{2a\tau}$.

Разложением в ряд функции Бесселя в формулах (21) и (22) с последующим почленным интегрированием, получим

$$t_{1_i} = T_0 e^{-\varphi_i(r, \tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_i^{2k}(4a\tau)^k}{2^{2k}(k!)^2} \gamma\left(k+1, \frac{r_0^2}{4a\tau}\right), \tag{23}$$

где $i = 1, 2$; $\gamma(n, x) = \int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt$ — неполная гамма-функция.

Функция $\gamma(n, x)$ табулирована [5].

В частном случае для температуры на оси скважины (при $r = 0$) из выражений (21) и (22) находим

$$t_1|_{r=0} = \frac{T_0}{2a\tau} e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau} \int_0^{r_0} e^{-\frac{r'^2}{4a\tau}} I_0\left(\frac{v}{2a_1}r'\right) r'dr' \tag{24}$$

При отсутствии фильтрации вод ($v = 0$) выражение для температуры на оси скважины имеет вид

$$t_1|_{r=0} = \frac{T_0}{2a\tau}\int_0^{r_0} e^{-\frac{r'^2}{4a\tau}} r'dr' = T_0\left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4a\tau}}\right). \qquad (25)$$

Эта формула известна [4] и характеризует изменение температуры в однородной непроницаемой среде.

Так как в формулах $\varphi_1(r, \tau)$ и $\varphi_2(r, \tau)$ коэффициент при r имеет разные знаки, а функция $I_0(x)$ монотонно возрастает с ростом аргумента, то из сравнения формул (21) и (22) видно, что для каждого момента времени температура на расстоянии от оси скважины в направлении потока ($\varphi = 0$) будет больше, чем температура на таком же расстоянии r, но в направлении $\varphi = \pi$.

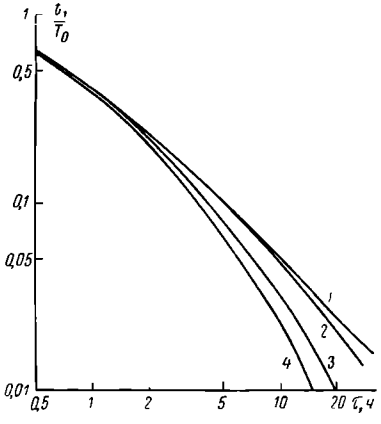


Рис. 1. Изменение температуры $\frac{t_1}{T_0}$ на оси скважины во времени для параметров $r_0 = 0{,}1$ *м*, $a = 5 \cdot 10^{-3}$ *м²/ч*, $a_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ *м²/ч* при различных значениях скорости фильтрации подземных вод, *м/сутки*:
1 — 0; *2* — 0,48; *3* — 0,72; *4* — 0,96

Можно еще заметить, что при $\frac{r_0^2}{4a\tau} < 1$ ряд в формуле (23) сходится очень быстро, так что для расчета температуры можно взять только его первый член

$$t_{1_i} \approx T_0 e^{-\varphi_i(r,\,\tau)} \int_0^{\frac{r_0^2}{4a\tau}} e^{-t} dt =$$

$$= T_0 e^{-\varphi_i(r,\,\tau)}\left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4a\tau}}\right) \qquad (26)$$

Для температуры на оси скважины при $r = 0$ получаем

$$\frac{t_1}{T_0} \approx e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau}\left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4a\tau}}\right). \qquad (27)$$

Как видно из графиков (рис. 1), с увеличением скорости фильтрации пластовых вод температура в скважине восстанавливается быстрее, причем с увеличением времени выстойки скважины скорость восстановления температуры увеличивается. Так, если при времени выстойки 1 *ч* относительная температура равна 0,39 при $v = 0$ и 0,36 при $v = 0{,}96$ *м/сутки*, то при времени выстойки 10 *ч* температура равна 0,049 при $v = 0$ и 0,022 при $v = 0{,}96$ *м/сутки*.

Второй случай начального распределения температуры соответствует бурению в проницаемых породах, когда во время бурения поддерживается постоянный расход жидкости q на единицу длины скважины и радиусом скважины можно пренебречь по сравнению с размерами зоны нарушения термического режима вокруг скважины (т. е. при достаточно больших значениях времени бурения). Если предположить, что влияние естественной фильтрации пластовых вод на термический режим пород в околоскважинной зоне мало по сравнению с влиянием нагнетания жидкости при бурении, то начальное распределение температуры будет иметь вид [6]

$$t_1 = f(x, y) = T_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{4a\tau_0}} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{a\tau_0}}\right)^{2n}, \qquad (28)$$

где τ_0 — время бурения; $\nu = \frac{qc_1}{4\pi\lambda}$ — безразмерная постоянная ($\nu = 1, 2, \ldots$); q — расход жидкости на единицу длины скважины, $м^2/ч$; c_1 — объемная теплоемкость жидкости в пласте, $ккал/м^3{}^\circ$ С.

Подставляя формулу (28) в функцию (18) и выполняя интегрирование, получим выражение для температуры в проницаемых породах после бурения

$$t_1 = T_0 \frac{\tau_0}{\tau - \tau_0} e^{-\left(\frac{v^2 a\tau}{4a_1^2} + \frac{x^2+y^2}{4a\tau} + \frac{vx}{2a_1}\right)} e^{\frac{a\tau\tau_0}{\tau+\tau_0}\left[\left(\frac{v}{2a_1} - \frac{x}{2a\tau}\right)^2 - \frac{y^2}{4a^2\tau^2}\right]} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{1}{n!}\left[\frac{\tau\sqrt{a\tau_0}}{(\tau+\tau_0)^2}\right]^{2n} \sum_{m=0}^{n} c_n^m (2m)!(2n-2m)! \left(\frac{y}{a\tau}\right)^{2(n-m)} \left(\frac{v}{a_1} - \frac{x}{a\tau}\right)^{2m} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(2m-2k)!\,k!} \left[\frac{\tau - \tau_0}{a\tau\tau_0\left(\frac{v}{a_1} - \frac{x}{a\tau}\right)^2}\right]^k \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l=0}^{n-m} \frac{1}{(2n-2m-2l)!\,l!} \left[\frac{(\tau-\tau_0)\,a\tau}{\tau_0 y^2}\right]^l \right\}. \qquad (29)$$

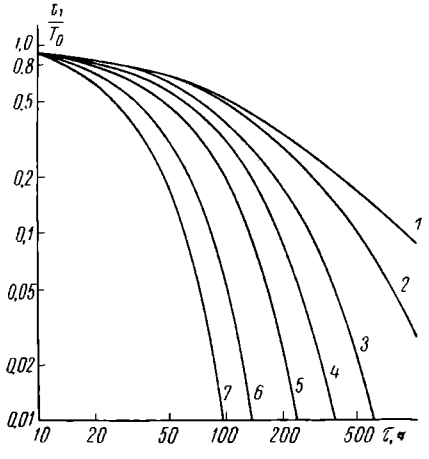


Рис. 2. Изменение температуры $\frac{t_1}{T_0}$ на оси скважины при $\nu = 1$, $a = 5 \cdot 10^{-3}$ $м^2/ч$, a_1 $5 \cdot 10^{-3}$ $м^2/ч$, $\tau_0 = 100$ $ч$ и различных значениях скорости фильтрации подземных вод: *м/сутки*: *1* — 0; *2* — 0,12; *3* — 0,24; *4* — 0,34; 0,48; *6* — 0,72; *7* — 0,96

Температуру среды на оси скважины можно найти, положив в выражение (29) $x = 0$ и $y = 0$,

$$t_1\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = T_0 \frac{\tau_0}{\tau - \tau_0} e^{-\frac{v^2 a}{4a_1^2}\tau \frac{\tau}{\tau+\tau_0}} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{2n!}{n!}\left[\frac{\tau v\sqrt{a\tau_0}}{(\tau - \tau_0)^2 a_1}\right]^{2n} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n-2k)!\,k!}\left[\frac{(\tau - \tau_0)\,a_1^2}{a\tau\tau_0 v^2}\right]^k \qquad (30)$$

Во втором случае, как видно из графиков (рис. 2), увеличение скорости фильтрации вод ведет к ускорению восстановления режима в еще большей степени, чем в первом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1952.
3. Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1947.
4. Дахнов В. Н., Дьяконов Д. И. Термические исследования скважин. Гостоптехиздат, 1952.
5. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности χ^2. Изд-во АН СССР, 1950.
6. Чекалюк Э. Б. Температурное поле пласта при нагнетании теплоносителя в скважину. Нефтяное хозяйство, 1955, № 4.