Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXI, вып. 1, 1972 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ОБЛАСТИ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ВЫРАБОТКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ ОПОРНОГО ДАВЛЕНИЯ

А. Г. Протосеня

Величина вывалообразований пород, нагрузка на крепь горных выработок, перемещения их контура определяются в основном размерами области неупругих деформаций *, образующейся в окружающем выработку породном массиве. В практике поддержания большинство подготовительных горных выработок испытывает влияние опорного давления, причем нет расчетных методов оценки этого влияния на размеры области неупругих деформаций.

Здесь исследуется упруго-пластическое распределение напряжений вокруг пластовой выработки круглого поперечного сечения, пройденной впереди очистного забоя и испытывающей его влияние. Рассмотрен случай расположения горной выработки в средней части длинного очистного забоя с осью, перпендикулярной забою, при горизонтальном залегании пластов.

Перемещения вдоль оси исследуемой выработки при достаточном удалении от линии очистного забоя близки к нулю, и в этом случае можно ограничиться анализом напряжений в плоскости, нормальной к оси. Породы в этой плоскости вблизи выработки с приближением очистного забоя будут испытывать одинаковые перемещения в его направлении. Следовательно, и здесь можно в первом приближении ограничиться решением задачи в плоской постановке.

В дальнейшем анализируется напряженное состояние в плоскости, нормальной к оси выработки (рис. 1). Исследование напряженного состояния массива вокруг одиночной горной выработки сводится, как известно [5], к определению напряжений в бесконечной плоскости с усилиями на бесконечности, равными напряжениям в нетронутом массиве в центре будущей выработки.

Вертикальное усилие на бесконечности в нашем случае, в соответствии с изложенным, нужно принять в виде

$$\sigma_1 = f(l)\gamma H.$$

Здесь $f(l)$ — 1 — эпюра опорного давления в долях γH, представляющая собой непрерывную функцию; l — расстояние от забоя до рас-

* Эта исходная предпосылка — предположение допущенное. В шахтных и лабораторных исследованиях правомерность ее не доказана. Хотя это допущение используется в расчетах ряда авторов, оно не является общепризнанным и встречает возражения.

сматриваемого сечения выработки; H — глубина ее заложения, γ — средний объемный вес горных пород. Принятие эпюры опорного давления $f(l)$—1 — в неявном виде вызвано тем, что она имеет различные аналитические выражения в зависимости от свойств основной и непосредственной кровли, их работы, паспортов управления кровлей, размеров и многих других факторов [2, 4]. Вид ее устанавливается при решении конкретных частных задач.

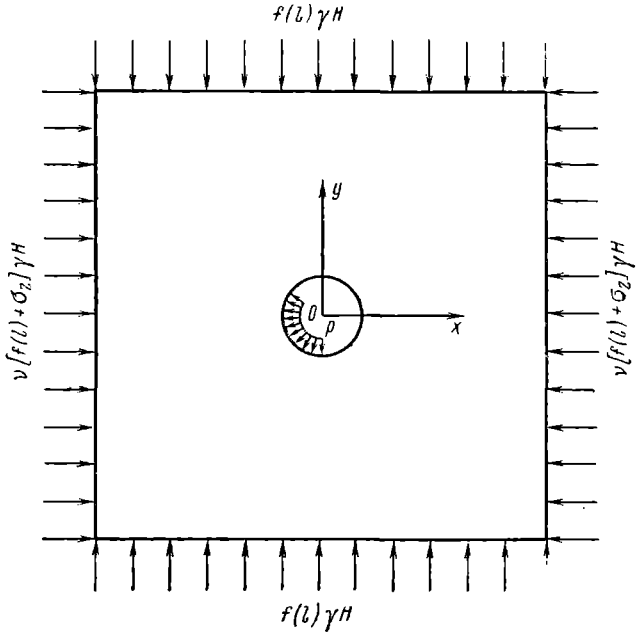


Рис. 1. Расчетная схема

Горизонтальная составляющая напряжений, параллельная линии очистного забоя, в центре будущей подготовительной выработки определяется из условия отсутствия перемещений вдоль очистного забоя:

$$\sigma_2=\nu[f(l)+\sigma_r']\gamma H, \qquad (1)$$

где ν — коэффициент Пуассона; σ_r' — радиальное напряжение в долях γH в сечении, нормальном к линии очистного забоя, изменяющееся от нуля на его контуре до $\lambda\gamma H$ в ненарушенном массиве; λ — коэффициент бокового распора. Зависимость σ_r' не всегда определяется при решении задач о параметрах опорного давления. В первом приближении для определения σ_r' можно использовать данные работы [3]. Касательные напряжения в рассматриваемой плоскости в центре будущей выработки в силу симметрии равны нулю.

Таким образом, решение задачи свелось к определению напряжений в бесконечной плоскости с круговым отверстием, по контуру которого приложено нормальное напряжение $\sigma_R=p$. Плоскость сжимается усилиями на бесконечности в вертикальном направлении $\sigma_1=f(l)\gamma H$ и горизонтальном $\sigma_2=\nu[f(l)+\sigma_r']\gamma H$.

В качестве условия пластичности возьмем наиболее распространенный случай прямолинейной наклонной огибающей кругов главных наибольших напряжений, уравнение которой имеет вид

$$(\sigma_\theta-\sigma_r^2)+4\tau_{r\theta}^2=\sin_\rho^2[\sigma_\theta+\sigma_r+2k(r)\operatorname{ctg}\rho]^2, \qquad (2)$$

где $k(r), \rho$ — соответственно сцепление и угол внутреннего трения горной породы.

Эксперименты по определению сцепления показывают, что оно с удалением от контура горной выработки возрастает и асимптотически стремится к его значению в ненарушенном массиве. В общем виде зависимость сцепления от расстояния [6] можно представить формулой

$$k(r)=k(\infty)-k_1\left(\frac{R_0}{R}\right)^n \tag{3}$$

где $k(\infty)$ — сцепление в ненарушенном массиве пород; k_1, n — параметры, определяемые экспериментальным путем ($n=1, 2, 3, 6$; $k_1 \geqslant 0$); R — радиальная координата; R_0 — радиус выработки.

Задача решается в безразмерной системе координат при предположении, что пластическая область полностью охватывает отверстие. Распределение напряжений в пластической области определяется функцией напряжений, которую найдем, внеся выражение (3) в уравнение (2), заменяя σ_θ, σ_r, $\tau_{r\theta}$ через функцию напряжений и решая полученное уравнение. Тогда

$$\Phi(r)=-\frac{k(\infty)}{2}\operatorname{ctg}\rho r^2+\frac{2k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{r^{2-n}}{(2-n)(\alpha+n)}+Q\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}\quad\text{при } n\neq 2; \tag{4}$$

$$\Phi(r)=-\frac{k(\infty)}{2}\operatorname{ctg}\rho r^2+\frac{2k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{\ln r}{2+\alpha}+Q\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}\quad\text{при } n=2. \tag{4а}$$

Здесь

$$\alpha=\frac{2\sin\rho}{1-\sin\rho}\qquad Q=p+\frac{2\cos\rho}{1-\sin\rho}\left[\frac{k(\infty)}{\alpha}-\frac{k_1}{\alpha+n}\right]$$

Для большинства горных пород угол внутреннего трения изменяется от 0 до 30° Будем считать, что ρ находится в указанных пределах, тогда $0<\alpha\leqslant 2$.

Компоненты напряжений $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\tau_{xy}^{(1)}$ в пластической области найдем по функциям (4) и (4а) и представим в следующих комбинациях:

$$\sigma_y^{(1)}+\sigma_x^{(1)}=-2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho+Q(2+\alpha)(z\bar{z})^{\alpha/2}+$$
$$+\frac{2k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{2-n}{\alpha+n}\cdot\frac{1}{(z\bar{z})^{n/2}}; \tag{5}$$

$$\sigma_y^{(1)}-\sigma_x^{(1)}+2i\tau_{xy}^{(1)}=-\frac{2n}{n+\alpha}\cdot\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{1}{(z\bar{z})^{n/2}}\cdot\frac{\bar{z}}{z}+\alpha Q(z\bar{z})^{\alpha/2}\frac{\bar{z}}{z}. \tag{6}$$

Напряжения в упругой области выражаются через две функции Н. И. Мусхелишвили $\Phi^*(z)$ и $\psi^*(z)$, аналитические в плоскости вне контура L, разделяющего пластическую и упругую зоны. На этом контуре комбинации указанных функций имеют следующие значения:

$$4\operatorname{Re}\Phi^*(z)=-2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho+Q(2+\alpha)(z\bar{z})^{\alpha/2}+2\frac{2-n}{\alpha+n}\cdot\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{1}{(z\bar{z})^{n/2}}, \tag{7}$$

$$2[\bar{z}\Phi^{*1}(z)+\psi^*(z)]=-\frac{2n}{\alpha+n}\cdot\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{1}{(z\bar{z})^{n/2}}\cdot\frac{\bar{z}}{z}+\alpha Q(z\bar{z})^{\alpha/2}\frac{\bar{z}}{z} \tag{8}$$

Отобразим внешность контура L на внешность единичного круга λ_1 с помощью функции $\omega(\zeta)$

$$z=\omega(\zeta)=C\zeta+\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j}{\zeta^j} \tag{9}$$

где C, C_j — пока не определенные коэффициенты.

Введем обозначения

$$\Phi(\zeta)=\Phi^*[\omega(\zeta)];\quad \psi(\zeta)=\psi^*[\omega(\zeta)]. \tag{10}$$

Граничные условия тогда представятся так:

$$4\mathrm{Re}\Phi(\zeta)=-2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho+Q(2+\alpha)\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{\alpha/2}+$$

$$+2\frac{2-n}{\alpha+n}\quad\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\quad\frac{1}{\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{n/2}},\qquad 1; \tag{11}$$

$$2\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta)+\psi(\zeta)\right]=-\frac{2n}{\alpha+n}\cdot\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\quad\frac{1}{\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{n/2}}\times$$

$$\times\frac{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)}+\alpha Q\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{\alpha/}\quad\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)}\qquad|\zeta|=1. \tag{12}$$

Согласно условиям на бесконечности, функции $\Phi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ ведут себя следующим образом:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2)+O(\zeta^{-2});\qquad \psi(\zeta)=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)+O(\zeta^{-2}). \tag{13}$$

Тогда задача сводится к нахождению функций $\omega(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ по граничным условиям (11) и (12) и условиям на бесконечности (13). При ее решении воспользуемся методом, предложенным в работе [7]. Рассмотрим функциональное уравнение

$$2\left[\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta)+\psi(\zeta)\right]=-\frac{2n}{\alpha+n}\quad\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\quad\frac{1}{\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{n/2}}\times$$

$$\times\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)}+\alpha Q\left[\omega(\zeta)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{\alpha/}\quad\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega(\zeta)} \tag{14}$$

Внеся выражение (9) в функциональное уравнение (14) и раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, видим, что $N=3$. Тогда

$$\omega(\zeta)=C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_2}{\zeta^2}+\frac{C_3}{\zeta^3} \tag{15}$$

Из условий симметрии следует, что постоянная $C_2=0$, а остальные — вещественные. Граничное условие (11) на контуре λ_1, при внесении в него выражения (15), представится в виде

$$4\mathrm{Re}\Phi(\zeta)=-2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho+2\frac{2-n}{\alpha+n}\quad\frac{\cos\rho\,k_1}{1-\sin\rho}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3\right)\right]^{n/2}}+Q(2+\alpha)\times$$

$$\times\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3\right)\right]^{\alpha/} \tag{16}$$

Введем функцию

$$F^{+}(\zeta)=2\frac{2-n}{\alpha+n}\quad\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3\right)\right]^{n/2}\left(C\quad\frac{C_1}{\zeta^2}+\frac{C_3}{\zeta^4}\right)^{\alpha/2}}+$$

$$+Q(2+\alpha)\,(C+C_1\zeta^2+C_3\zeta^4)^{\alpha/} \tag{17}$$

которая будет аналитичной внутри единичного круга $|\zeta|<1$, а функция

$$F^{-}(\zeta)=\frac{4\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta)+2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho}{\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}+\frac{C_3}{\zeta^4}\right)^{\alpha/2}} \tag{18}$$

в его внешности $|\zeta|>1$.

Тогда краевое условие (16) запишется в виде

$$F^{+}(\zeta)=F^{-}(\zeta) \tag{19}$$

Функции $F^{+}(\zeta)$ и $F^{-}(\zeta)$ являются аналитическим продолжением друг друга через единичную поверхность. По теореме Лиувилля они равны одной и той же постоянной, которая находится при $\zeta=0$:

$$F^{+}=Q(2+\alpha)\,C^{\alpha/} \tag{20}$$

Тогда

$$4\mathrm{Re}\Phi(\zeta)=Q(2+\alpha)\,C^{\alpha/2}\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}+\frac{C_3}{\zeta^4}\right)^{\alpha/2}-2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho\,. \tag{21}$$

Постоянную C найдем из выражения (21) при $\zeta\quad\infty$ используя условия на бесконечности $\sigma_1+\sigma_2$:

$$C^{\alpha}=\frac{[(\nu+1)f(l)+\nu\sigma_r']\,\gamma H+2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho}{Q(2+\alpha)}\,. \tag{22}$$

Заменяя в функциональном уравнении (14) выражение

$$\left[\omega(\zeta)\,\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{\alpha/}$$

его значением из соотношения (11) и используя при этом формулу (21), получим уравнение

$$2\left[\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\,\Phi'(\zeta)+\psi(\zeta)\right]=-\frac{2n}{2+\alpha}\quad\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\quad\frac{\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3}{C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3\right)\right]^{n/2}}+$$

$$+\alpha QC^{\alpha/2}\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}+\frac{C_3}{\zeta^4}\right)^{\alpha/}\quad\frac{\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta+C_3\zeta^3}{C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_3}{\zeta^3}} \tag{23}$$

Постоянные C_1 и C_3 выберем таким образом, чтобы правая часть функционального уравнения (23) была аналитической во внешности единичного круга. Отсюда следует, что $C_3=0$.

Значение функции $\Phi(\zeta)$ найдем из граничного условия (11) Для этого введем две функции

$$F_1^+(\zeta)=2\frac{2-n}{\alpha+n}\cdot\frac{k_1\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{1}{\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta\right)\right]^{n/2}}\cdot\frac{1}{\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}\right)^{\alpha/2}}+$$

$$+Q(2+\alpha)(C+C_1\zeta^2)^{\alpha/2}-\frac{2\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}\right)^{\alpha/2}} \tag{24}$$

и

$$F_1^-(\zeta)=\frac{2\Phi(\zeta)+2k(\infty)\operatorname{ctg}\rho}{\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}\right)^{\alpha/2}}, \tag{25}$$

первая из которых аналитична внутри $|\zeta|<1$, а вторая — вне $|\zeta|>1$ единичного круга.

Тогда граничное условие (11) запишется в виде

$$F_1^+(\zeta)=F_1^-(\zeta). \tag{26}$$

Используя теорему Лиувилля, из уравнения (25) определим значение искомой функции

$$\Phi(\zeta)=\frac{2+\alpha}{2}QC^{\alpha/2}\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}\right)^{\alpha/2}-k(\infty)\operatorname{ctg}\rho. \tag{27}$$

Функцию $\psi(\zeta)$ находим из уравнения (23) внесением в него выражения (27):

$$\Psi(\zeta)=-\frac{2k_1}{\alpha+2}\cdot\frac{\cos\rho}{1-\sin\rho}\cdot\frac{1}{\left[\left(C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}\right)\left(\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta\right)\right]^{n/2}}\times$$

$$\times\frac{\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta}{C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}}+\frac{\alpha QC^{\alpha/2}}{2}\left(C+\frac{C_1}{\zeta^2}\right)^{\alpha/}\cdot\frac{\frac{C}{\zeta}+C_1\zeta}{C\zeta+\frac{C_1}{\zeta}}\times$$

$$\times\left[1+\frac{C_1(\alpha+2)}{\zeta^3}\cdot\frac{C\zeta+\frac{C}{\zeta}}{C^2-\frac{C_1^2}{\zeta^4}}\right] \tag{28}$$

Используя условия на бесконечности, определяем оставшийся коэффициент C_1 из соотношения (28) при $\zeta\to\infty$

$$C_1=\frac{[f(l)(1-\nu)-\nu\sigma_r']\gamma HC^{1-\alpha}}{\alpha Q} \tag{29}$$

Контур L, разделяющий упругую пластическую области, является эллипсом с полуосями

$$a=C\left(1+\frac{C_1}{C}\right)\text{ и }b=C\left(1-\frac{C_1}{C}\right),$$

уравнение которого имеет вид

$$\frac{X^2}{C^2\left(1+\frac{C_1}{C}\right)^2}+\frac{y^2}{C^2\left(1-\frac{C_1}{C}\right)^2}=1 \tag{30}$$

При решении задачи предполагалось, что пластическая область полностью охватывает отверстие. Для этого необходимо, чтобы усилия на бесконечности удовлетворяли условию

$$C\left(1-\frac{C_1}{C}\right)\geqslant 1 \qquad (31)$$

Знак равенства соответствует касанию контура L и окружности радиуса R_0.

Для случая $\sigma_1=\sigma_2$ радиус пластической области C совпадает с его значением, полученным в работе [6].

В качестве примера найдем размеры области неупругих деформаций для следующих условий заложения выработки: $H=600$ *м*; $\gamma=2{,}5$ *т/м*^{3}; $\nu=0{,}5$; $k_1=20$ *т/м*^{2}; $k(\infty)=150$ *т/м*^{2}; $\rho=19°30'$; $n=2$; $p=22$ *т/м*^{2}. Расчет произведем для сечения, находящегося на расстоянии $l=100$ *м* от линии очистного забоя. Опорное давление в центре рассматриваемого поперечного сечения на основании работ [1—4] можно принять равным $f(l)-1=0{,}3$ и $\sigma_r'=1{,}0$. Результаты расчетов графически представлены на рис. 2. Анализ этих результатов показывает, что под действием опорного давления область неупругих деформаций возрастает. При этом изменяется ее очертание, что свидетельствует о качественном и количественном влиянии опорного давления на форму и размеры области неупругих деформаций.

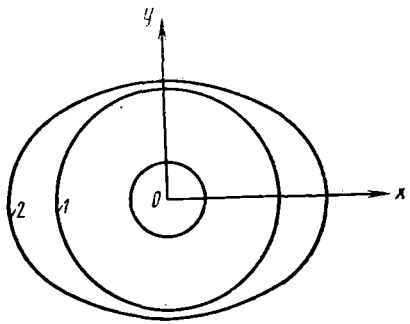


Рис. 2. Величина и характер области неупругих деформаций вокруг горной выработки

1 — без влияния очистных работ; *2* — на расстоянии сечения выработки от линии очистного забоя *l*, равном 100 *м*

Предложенный метод расчета напряжений может быть использован для подготовительных выработок, пройденных в мощных угольных пластах (мощность пласта в несколько раз больше радиуса выработки). Этот метод применим также для случая, когда прочностные характеристики породных слоев кровли и почвы на контакте с угольным пластом близки.

При проведении подготовительных выработок по разнородным породам, резко отличающимся по своим упругим и реологическим свойствам, предлагаемое решение неправомерно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ардашев К. А. и др. Совершенствование управления горным давлением. Недра, 1967.
2. Борисов А. А. Расчеты опорного давления в лавах пологих пластов. Недра, 1964.
3. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок. Труды совещания по управлению горным давлением. АН СССР, 1938.
4. Либерман Ю. М. К вопросу об опорном давлении впереди очистного забоя. В сб. «Физико-механические свойства, давление и разрушение горных пород». Ч. 1. АН СССР, 1962.
5. Руппенейт К. В. Некоторые вопросы механики горных пород. Углетехиздат, 1954.
6. Сажин В. С. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг горных выработок различного очертания. Недра, 1968.
7 Черепанов Г. П. Об одном методе решения упруго-пластической задачи. ПММ, т. 27, вып. 3, 1963.