Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. LXII, вып. 1, 1972 г.

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ СИГНАЛОВ

Н. М. Третьяков

Пусть имеется неслучайный сигнал (или конкретная реализация случайного сигнала) $y=y(t)$. Предположим, эта функция дифференцируема. Тогда производная в точке t есть предел

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Приближенная оценка $y'(t)$ — отношение

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

при малых Δt может быть положено в основу принципа действия устройств дифференцирования медленно изменяющихся сигналов. Алгоритм таких устройств, как известно, заключается в следующем: через равные интервалы времени Δt замеряются значения сигнала $y: y(0)$, $y(\Delta t)$, $y(2\Delta t)\ldots$ $y(n\Delta t)$, из двух соседних значений образуется разность $y[(i+1)\Delta t]-y(i\Delta t)$ и делится на интервал Δt. В результате получаем

$$\frac{y[(i+1)\Delta t] - y(i\Delta t)]}{\Delta t} \approx y'\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right]. \qquad (2)$$

Этот способ, технически реализованный во многих устройствах, имеет крупный недостаток: интервал Δt должен быть настолько большим, чтобы при медленном изменении сигнала $y(t)$ отличие двух очередных значений, отстоящих друг от друга на интервал Δt, было больше погрешности прибора, измеряющего $y(t)$. С другой стороны, этот интервал Δt должен быть настолько малым, чтобы в пределах этого интервала укладывались лишь практически прямолинейные и безусловно монотонные участки кривой $y(t)$.

Очевидно, что одновременно этим требованиям удовлетворить невозможно. Поэтому при реализации указанного алгоритма обычно сталкиваются с компромиссным выбором интервала Δt. Этот компромисс достигается лишь за счет точности производной либо на крутых, либо на пологих участках функции $y(t)$.

Удовлетворительным решение задачи, очевидно, будет лишь при переменных Δt, принимающих большие значения на участках медленного изменения $y(t)$ и малые — на участках быстрого изменения. Однако реализация устройства, технически осуществляющего изменение Δt в зависимости от величины $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, т. е. величины, получаемой при фиксировании шага дифференцирования Δt, чрезвычайно сложна. Для определения производной целесообразнее использовать другой алгоритм, основанный на видоизменении выражения (1)*.

Рассмотрим монотонный участок функции $y(t)$. Любой сигнал как функция времени может быть разбит на такие участки. На участке естественно определена, и притом взаимно однозначно, обратная функция $t=t(y)$. Производная этой функции $t'=\frac{dt}{dy}$ связана с искомой производной $y'=\frac{dy}{dt}$ соотношением

$$y'=\frac{1}{t'}.$$

Если измерять и вычислять по известному алгоритму не y', а t', и затем находить y' уже не непосредственно, а как $y'=\frac{1}{t'}$, то такой способ получения производной оказывается эквивалентным прямому способу нахождения y', но уже при переменном шаге Δt.

Действительно, разобьем весь интервал изменения y на интервалы Δy. Измерим последовательные моменты времени, при которых кривая $y(t)$, изменяясь, проходит значение y, $y+\Delta y$ и т. д. Получим значения $t(y)$ и $t(y+\Delta y)$. Ясно, что отношение

$$\frac{t(y+\Delta y)-t(y)}{\Delta y}\approx t'(y) \tag{3}$$

является оценкой для производной $t'(y)$. Так как интервал $\Delta y=\text{const}$, разность

$$\Delta t=t(y+\Delta y)-t(y)$$

будет бóльшей при медленном ходе процесса $y(t)$ и эта же разность будет малой при быстром изменении $y(t)$.

Поскольку

$$y'(t)=\frac{1}{t'(y)}, \tag{4}$$

то

$$y'(t)=\frac{\Delta y}{t(y+\Delta y)-t(y)}=\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{5}$$

Однако в этом случае оценка значения производной более точна, так как найдена при автоматическом изменении интервала Δt в нужную сторону. При этом степень приближения оценки производной к ее истинному значению определяется только величиной интервала Δy.

При уменьшении Δy можно получить оценки производной, сколь угодно близко приближающиеся к истинному значению. При этом выбор

---

* Третьяков Н. М., Третьякова Н. М., Бернштейн А. Е. Устройство для определения знака производной медленно меняющихся сигналов. Бюлл. изобр., 1970, № 29, № 276539.

интервала Δy определяется только порогом чувствительности квантизатора и не зависит от характера изменения функции $y(t)$.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет однозначно сопоставить любую конкретную реализацию сигнала с конкретной ступенчатой функцией, являющейся оценкой для производной этого сигнала. Получаемая оценка производной близка к истинному значению как на участках быстрого изменения дифференцируемой функции, так и на участках медленного изменения.