Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXIII, вып. 1, 1972 г.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ УГЛУБКИ КРУГЛОГО КАРЬЕРА

Л. А. Слуцман

Под круглым карьером условимся понимать карьер, контур которого на конец отработки близок к эллиптическому конусу. Исследования будем производить в естественной декартовой системе координат, т. е. плоскость *xoy* параллельна плоскости горизонта, оси *ox* и *oy* параллельны осям карьера. Зададимся следующими параметрами: φ —угол откоса рабочего борта карьера в поперечном сечении (zoy); ψ — угол откоса рабочего борта карьера в продольном сечении (zox); S_0 — площадь дна карьера. За трафарет рабочей зоны карьера примем усеченный эллиптический конус с площадью основания S_0 и с главными углами φ и ψ.

Легко проверить, что если центр дна карьера находится в точке с координатами (p, q, r), то трафарет рабочей зоны описывается уравнением

$$(x-p)^2 \operatorname{tg}^2\psi + (y-q)^2 \operatorname{tg}^2\varphi = (z-r_1)^2, \qquad (1)$$

где

$$r_1 = r - \sqrt{\frac{S_0}{\pi \operatorname{ctg}\psi \operatorname{ctg}\varphi}}.$$

Пусть исходная информация о карьере представлена сечениями карьера плоскостями $z=h_0+ih$ ($i=0,1, \ldots, n-1$). Определение рационального направления углубки основано на методе изоповерхностей руды и горной массы, обеспечивающем самое низкое положение графика $V=V(P)$, который определяется направлением углубки *.

Пусть трафарет рабочей зоны помещен в точку (p, q, r). Обозначим через $V(p, q, r)$ объем руды, заключенный в рабочей зоне, а через $Q(p, q, r)$ — объем горной массы. Под изоповерхностью руды (горной массы) будем понимать геометрическое место точек (p, q, r) с фиксированным значением функции $V(p, q, r)$.

Чтобы построить рациональное направление углубки карьера, следует найти на каждой изоповерхности руды $V(p, q, r) = \text{const}$ точки, в которых $Q(p, q, r) \to \min$, т. е. найти $\min Q(p, q, r)$ при условии $V(p, q, r) \equiv V_0$. Легко показать, что в точке, где $Q(p, q, r) \equiv \min Q$ и изоповерхности $V(p, q, r) \equiv V_0$ и $Q(p, q, r) \equiv \min Q$ соприкасаются.

---

* Арсентьев А. И. Определение производительности и границ карьеров. 2-е изд. Недра, 1970.

Арсентьев А. И. Методы установления наилучшего направления развития горных работ при проектировании карьеров. В сб. «Научные основы проектирования горных предприятий». Наука, 1968.

Введем важное для дальнейшего исследования понятие z-изолинии. Под z-изолиниями руды (горной массы) будем понимать сечения изоповерхностей руды (горной массы) плоскостью $z = \text{const}$. Очевидно, что в точке (p, q, r), в которой достигается минимум функции $Q(p, q, r)$ вдоль $V(p, q, r) \equiv V_0$, z-изолинии руды и горной массы, отвечающие $z = r$, соприкасаются. Таким образом, решение задачи можно свести к определению точек соприкосновения z-изолиний руды и горной массы. Аналогично можно ввести x, y-изолинии.

Цель дальнейшего исследования — получить дифференциальные уравнения, описывающие изоповерхности, которые позволяют определять направления углубки, минуя вычисление объемов.

Можно упростить решение задачи, изменив контур карьера на конец отработки подходящим аффинным преобразованием. Аффинным преобразованием пространства, как известно, называется линейное невырожденное преобразование вида

$$\begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ z^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аффинное преобразование переводит точку M (x, y, z) (оригинал) в точку $M^*(x^*, y^*, z^*)$ и обладает следующими свойствами: 1) переводит плоскость в плоскость, причем образы параллельных плоскостей — параллельные плоскости; 2) сохраняет отношение объемов, т. е. $V_1{:}V_2 = V_1{}^*{:}V_2{}^*$; 3) аффинные образы прямых — прямые; параллельных прямых — параллельные прямые.

Перечисленные свойства показывают, что аффинные преобразования сохраняют коэффициент вскрыши, и тем самым задача определения рационального направления углубки карьера инвариантна по отношению к аффинному преобразованию. Рассмотрим аффинное преобразование

$$\begin{aligned} x^* &= x \operatorname{tg}\psi; \\ y^* &= y \operatorname{tg}\varphi; \\ z^* &= z, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\psi & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi \neq 0.$$

На основании соотношений (1) и (3) имеем

$$(x^* - p^*)^2 + (y^* - q^*)^2 = (z^* - r_1{}^*)^2. \tag{4}$$

Таким образом, аффинный образ трафарета рабочей зоны карьера есть прямой круговой конус. Заметим, что на основании соотношений (3) выполнение аффинного преобразования пространства эквивалентно выполнению аффинного преобразования плоскости

$$\begin{aligned} x^* &= x \operatorname{tg}\psi; \\ y^* &= y \operatorname{tg}\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

для каждой плоскости $z = \text{const}$.

В дальнейшем будем считать, что мы имеем дело с аффинными образами и знак * будем опускать.

Перейдем к вычислению функций $V(p, q, r)$ и $Q(p, q, r)$. Поместим трафарет рабочей зоны карьера в точку (p, q, r). Проведем плоскость $z = z_0$. Эта плоскость пересечет трафарет по окружности S_{z_0}.

Площадь руды, содержащуюся внутри этой окружности, обозначим через $S_{z_{0_f}}$. Символ f (или F) указывает на совокупность фигур в сечении рудной залежи (горной массы) плоскостью $z = z_0$. Объем $V(p, q, r)$ $[Q(p, q, r)]$ выражается через введенные функции следующим образом:

$$V(p, q, r) = \int_r^\infty S_{z_f} dz;$$
$$Q(p, q, r) = \int_r^\infty S_{z_F} dz. \tag{6}$$

Очевидно, что пределы интегрирования в формулах (6) на самом деле конечны, так как функции S_{z_f} и S_{z_F} обращаются в нули при достаточно большом z. Исходная информация о карьере представлена горизонтальными сечениями z_i $(i=0,1, ..., n-1)$, проведенными с шагом h, поэтому только в этих сечениях возможно определение функций S_{z_i} и $S_{z_{i_F}}$. Следовательно, мы вынуждены вычислять формулы (6) приближенно. Воспользуемся для этой цели формулой трапеций

$$V(p, q, r) = 0{,}5h\left[S_{z_{k_f}} + 2\sum_{l=2}^{m-1} S_{z_{k+l_f}} + S_{z_{k+m_f}}\right], \tag{7}$$

где $z_к$ — наибольшее из $z_i \leqslant r$; z_{k+m} таково, что $S_{z_{k+m-1_f}} > 0$ и $S_{z_f} = 0$ при $z \geqslant z_{k+m}$. Аналогичная формула получается для $Q(p, q, r)$.

Так как вдоль поверхности $dV \equiv 0$, то

$$\frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq + \frac{\partial V}{\partial r} dr \equiv 0. \tag{8}$$

На основании этого дифференциального соотношения, описывающего изоповерхность, x, y, z-изолинии выражаются соответственно следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial V}{\partial q} dq + \frac{\partial V}{\partial r} dr \equiv 0;$$
$$\frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial r} dr \equiv 0; \tag{9}$$
$$\frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq \equiv 0.$$

Таким образом, наша задача свелась к вычислению производных от функций V, Q.

На основании равенства (7) для вычисления указанных производных достаточно уметь дифференцировать функцию S_{z_f} (S_{z_F}). С этой целью рассмотрим на плоскости xy совокупность фигур F. На рис. 1 $F = \{F_1, F_2\}$. Пусть S — окружность радиуса R с центром в точке (x, y). Через $S_F(x, y, R)$ обозначим часть площади F, заключенной в круге S.

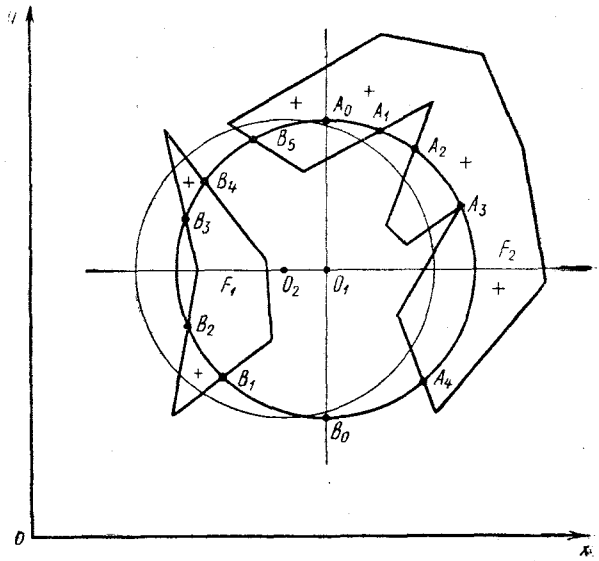


Рис. 1. К определению $\frac{\partial S_F}{\partial x}\left(\frac{\partial S_F}{\partial y}\right)$

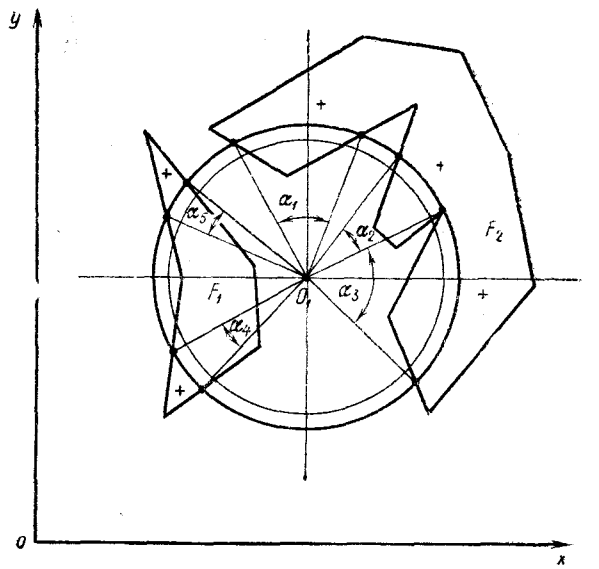


Рис. 2. К определению $\frac{\partial S_F}{\partial R}$

Наша задача — вычислить $\frac{\partial S_F}{\partial x}$, $\frac{\partial S_F}{\partial y}$, $\frac{\partial S_F}{\partial R}$. Начнем с вычисления $\frac{\partial S_F}{\partial x}$.

Обратимся к рис. 1. Построим окружность S_1 радиуса R с центром в точке $O_1(x, y)$ (на рис. 1 эта окружность показана жирной линией). Дадим абсциссе точки O_1 приращение Δx (пусть для определенности $\Delta x<0$) и перейдем к окружности S_2 радиуса R с центром в точке $O_2(x+\Delta x, y)$. Тогда

$$\Delta S_F = S_{2_F} - S_{1_F}, \tag{10}$$

где S_{1_F} — площадь F, заключенная в правом «серпе», образованном окружностями S_1, S_2; S_{2_F} — площадь F, заключенная в левом «серпе».

Проведем A_0B_0 параллельно O и пронумеруем точки пересечения F с окружностью S_1 по часовой стрелке. В число точек пересечения включим точки A_0 и B_0. Точки пересечения, лежащие в правом «серпе», обозначим через A_i; в левом — через B_i. Отметим значком «+» дуги окружности S_1, целиком лежащие внутри F. На рис. 1 это дуги A_0A_1, A_2A_3, A_3A_4, B_1B_2, B_3B_4, B_5A_0. Обозначим через A_{i_y}, B_{i_y} ординаты точек пересечения. Вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} S_{1_F} &= [(A_{0_y} - A_{1_y}) + (A_{2_y} - A_{3_y}) + (A_{3_y} - A_{4_y})](-\Delta x) + O(\Delta x); \\ S_{2_F} &= [(B_{6_y} - B_{5_y}) + (B_{4_y} - B_{3_y}) + (B_{2_y} - B_{1_y})](-\Delta x) + O(\Delta x). \end{aligned} \tag{11}$$

В общем случае формула (11) обобщается следующим способом:

$$\begin{aligned} S_1 &= (-\Delta x) \sum_{+\cup} A_{i_y} - A_{i+1_y} + O(\Delta x); \\ S_2 &= (-\Delta x) \sum_{+\cup} B_{i+1_y} - B_{i_y} + O(\Delta x), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\sum_{+\cup}$ означает суммирование по дугам, помеченным плюсом, в правом и левом «серпах» соответственно.

На основании формул (10), (12) получаем

$$\frac{\partial S_F}{\partial x} = \sum_{+\cup} A_{i_y} - A_{i+1_y} - \sum_{+\cup} B_{i+1_y} - B_{i_y}. \tag{13}$$

Перейдем к вычислению $\frac{\partial S_F}{\partial y}$. Заметим, что формула для $\frac{\partial S_F}{\partial y}$ получается повторением приведенных рассуждений, если координатные оси поменять местами (сделать поворот на $\frac{\pi}{2}$).

Таким образом,

$$\frac{\partial S_F}{\partial y} = \sum_{+\cup} A_{i_x} - A_{i+1_x} - \sum_{+\cup} B_{i+1_x} - B_{i_x}, \tag{14}$$

где $\cup A_iA_{i+1}$ и $\cup B_{i+1}B_i$ — дуги, помеченные плюсом, лежащие соответственно в верхнем и нижнем «серпе».

Осталось вычислить $\frac{\partial S_F}{\partial R}$. Обратимся к рис. 2. Пусть радиус R окружности S_1 (жирная линия) получает приращение Δr ($\Delta r<0$). Подсчитаем $\Delta S_F = -P$, где P — площадь F, заключенная в кольце окружнос-

тей $S_1(R)$ и $S_2(R+\Delta r)$. Отметим дуги окружности S_1, помеченные плюсом, целиком лежащие в F, и соединим концы этих дуг с центром. В результате получим углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$.

Вычисления показывают, что

$$P = -\Delta r \sum_{+\cup} \alpha_i R + O(\Delta r). \tag{15}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S_F}{\partial R} = R \sum_{+\cup} \alpha_i. \tag{16}$$

Последняя формула означает, что $\frac{\partial S_F}{\partial R}$ равняется сумме длин дуг, помеченных плюсом.