Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXV, вып. 1, 1973 г.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАГРУЖЕННОГО ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ СТРУИ

К. Г. Асатур

Динамический характер действия гидромониторной струи на монолитный массив [1] связан с известной формулой Бернулли для силы давления стационарной струи на перпендикулярную к ней плоскость преграды

$$P = \rho Q (V - U), \tag{1}$$

где ρ — плотность, Q — расход, V — скорость струи; U — средняя скорость поверхности (груди) забоя, при этом

$$U \ll V, \tag{2}$$

поэтому в процессе деформации массива скорость U почти не влияет на величину P. Ниже передача такой нагрузки исследуется подробно.

Если массив, нагруженный давлением струи, рассматривать как упругое полупространство, то характер изменения его напряженно-деформированного состояния в приконтактной области можно изучить на основе решения [2] динамических уравнений Лямэ для осесимметричной нагрузки вида

$$p = \frac{\delta P}{(r_0^2 + r^2)^{3/2}} \qquad (r_0 = \omega r_*), \tag{3}$$

где r — расстояние от оси нагрузки; r_* — параметр, который в данном случае может быть принят за радиус струи; δ — безразмерные постоянные, выбираемые по соображениям наилучшей аппроксимации нагрузки. При этом в формуле (3) целесообразнее всего принять $\omega = 1{,}05$; $\delta = 1{,}1$. Тогда общая гидравлическая нагрузка, вычисленная по формуле

$$P_0 = 2\pi \int_0^\infty p r \, dr = \delta P, \tag{4}$$

оказывается на 10% завышенной, но внутри области сосредоточения давлений струи, например в радиусе $r = 2{,}85 r_*$ [3], получается недостаток

нагрузки в размере примерно тех же 10%, что дает небольшой запас в расчетах; при названных значениях ω и δ выдерживается также соотношение $\frac{\delta}{\omega^2}=1$, т. е. необходимое для струи условие

$$\frac{\rho V^2}{2}=p_0=p\Big|_{r=}=\frac{P}{2\pi r_*^2} \tag{5}$$

В работе [2] получены следующие функции: u — смещение по r, w — смещение по оси z нагрузки; U_0 — начальная (при $t=0$) скорость смещения нагруженной ($z=0$) поверхности, что позволяет найти ее среднее значение

$$\overline{U_0}=\frac{2\pi}{P\delta}\int_0^\infty p\,U_0\,r\,dr=\frac{p_0}{4E}n\,(1+\nu)\,[2\,(1-\nu)-(\chi_b-c\chi_a)], \tag{6}$$

где t — время; E — модуль упругости; — коэффициент Пуассона для полупространства;

$$c=\alpha_1+\frac{2\alpha}{\chi_a};\ \alpha=\frac{1-2\nu}{2(1\quad\nu)}\qquad\alpha_1=\frac{1}{1-\nu};$$

$\chi_a=\chi_a(\nu)$, $\chi_b=\chi_b(\nu)$, n упругие константы полупространства (первые две безразмерные, третья имеет размерность скорости).

Эти постоянные находятся из уравнений, содержащих функции, которые после простых преобразований приводятся к виду

$$4\alpha_2\int_0^\infty\int_0^\infty\left[-\frac{2\alpha}{}-(1+\beta n_0^2)\tau+\frac{4\alpha+6\beta n_0^2}{\tau^3}\zeta^2+\right.$$

$$\left.+\frac{4\beta n_0^2}{\tau^2}\zeta^2-\frac{4\beta n_0^2}{}\zeta^4\right]\exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tau^2}-\zeta-2\tau\right)d\zeta\,d\tau; \tag{7}$$

$$\varphi_1=\frac{8n^2(1-2\nu)}{(1-\nu)\nu}\int_0^\infty\int_0^\infty k^2\,t\,e^{-k(z+nt-r_0)}\frac{\partial}{\partial z}\exp\left[-\left(\frac{z}{nt}\right)^2-\right.$$

$$\left.-k\,(nt+r_0)\right]dz\,dt=8\alpha_2(1\quad\alpha)\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\zeta}{}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tau^2}-\zeta-2\tau\right)d\zeta\,d\tau, \tag{8}$$

где $\zeta=kz;\ \tau=knt;\ n=n_0(\nu)\sqrt{\frac{E}{\rho_s}};$

$$\alpha_2=4\frac{1-2\nu}{\nu};\ \beta=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)}$$

ρ_s — плотность массива; k подынтегральный множитель, в дальнейшем исключающийся из уравнений.

Проинтегрировав функции (7) и (8) по ζ, получим

$$\varphi = 4\alpha_2 \int_0^\infty \left\{ \left[-\frac{2\alpha}{} - (1 + \beta n_0^2)\tau \right] \frac{}{\sqrt{2}} \Gamma(1) D_{-1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{4\alpha + 6\beta n_0^2}{\tau^3} + \frac{4\beta n_0^2}{\tau^2} \right) \frac{\tau^3}{2^{3/2}} \Gamma(3) D_{-3}\left(\frac{}{\sqrt{2}}\right) -$$

$$\left. - \frac{4\beta n_0^2}{2^{5/2}} \Gamma(5) D_{-5}\left(\frac{}{\sqrt{2}}\right) \right\} \exp\left(\frac{\tau^2}{8} - 2\tau\right) d\tau;$$

$$\varphi_1 = 4\alpha_2 (1 - \alpha) \int_0^\infty \tau \Gamma(2) D_{-2}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{\tau^2}{8} - 2\tau\right) d\tau,$$

где Γ — гамма-функция; D — функции параболического цилиндра.

Выразим с помощью известных рекуррентных формул все функции D через

$$D_{-1}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\frac{}{8}\left[1 - \Phi\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

где Φ — интеграл вероятности.

Подставив значения гамма-функций и вычислив Φ с помощью таблиц, уравнения для определения χ_a, χ_b и n_0 после простых преобразований представим в виде

$$-\alpha_1(\chi_a - \chi_b) + 2\alpha n_0^2\left(\chi_a - \frac{2\nu^2 + 9{,}85\nu - 5{,}2}{\nu}\right) - \frac{2\alpha(7 - 8\nu)}{\nu} = 0; \quad (9)$$

$$\alpha_1\alpha\chi_a + \alpha_1(\chi_b - \chi_a) + 2\alpha n_0^2\left(\chi_b - \frac{2\chi_a}{1 - \nu} - \frac{2\nu^2 - 8{,}5\nu + 4{,}5}{1 - \nu}\right) -$$

$$- \frac{2\alpha(1 - 4\nu)}{\nu} = 0; \quad (10)$$

$$[2(1 - \nu) - (\chi_b - c\chi_a)]\, n_0 = \sqrt{2\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}} \quad (11)$$

Здесь приравнены точное [4] и приближенное значения U_0 в центре.

Из этих уравнений, например для $\nu = 0{,}3$, наиболее подходящим по физическим соображениям будет $n_0 = 2{,}51$; тогда $\chi_a = -0{,}98$; $\chi_b - c\chi_a = 0{,}97$. Взяв $E = 2 \cdot 10^6$ *н/см*^{2}, $\rho_s = 2000$ *кг/м*^{3}, получим $n = 4850$ *м/сек*.

В начальный момент времени, учитывая выражения (1), (5) и (6), получаем

$$\overline{U_0} = \frac{H}{1 + H} V;$$

$$H = \frac{\rho}{8E}(1 - \nu)[2(1 - \nu) - (\chi_b + c\chi_a)]\, n\, V.$$

Для взятых значений ν, E, ρ_s и давления $p_0 = 420$ *н/см*^{2} получаем $H = 0{,}0014$, а для $p_0 = 2000$ *н/см*^{2} имеем $H = 0{,}003$. Отсюда видно, что условие (2) практически выдерживается.

Максимальные скалывающие напряжения на оси z [2]

$$\tau_c = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{P\delta}{8\pi}\left\{\frac{(7-2\nu)z + (1-2\nu)r_0}{(z+r_0)^3} - \right.$$

$$\frac{(7-2\nu)z + (1-2\nu)r_0 + (4\gamma_b + 2\gamma_a + 1 \quad 2\nu)nt}{(z+r_0+nt)^3} -$$

$$\left.\frac{1-2\nu}{\nu} \quad \frac{ntf}{(nt+r_0)^3} - \frac{1-2\nu}{2\nu} \quad \frac{1}{(nt+r_0)^2}\exp\left[-\left(\frac{z}{nt}\right)^2\right]\right\}. \qquad (12)$$

Заметим, что лучшее приближение, особенно для больших значений z, дает функция, в которой экспонент является множителем также и при предпоследнем члене уравнения (12).

В начальный период времени, при малых t, значения τ_c почти целиком определяются последним членом зависимости (12), причем сразу же после нагружения полупространства, на поверхности $z=0$

$$= -\frac{1-2\nu}{8\nu} p_0.$$

Отрицательные члены в формуле (12) при $t \to \infty$ стремятся к нулю; τ_c меняет знак, а затем начинает стремиться к своему значению для статического состояния.

Производные

$$\frac{\partial \tau_c}{\partial z} = \frac{P\delta}{8\pi}\left\{\frac{4(1+\nu)r_0 - 2(7-2\nu)z}{(z+r_0)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(1-\nu)r_0 - 2(7-2\nu)z + [6(2\gamma_b + \gamma_a) - 4 - 4\nu]nt}{(z+r_0+nt)^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-2\nu}{\nu} \quad \frac{z}{(nt)^2} \quad \frac{1}{(nt+r_0)^2}\exp\left[-\left(\frac{z}{nt}\right)^2\right]\right\};$$

$$\frac{\partial \tau_c}{\partial t} = \frac{P\delta}{8\pi} n \left\{\frac{3[(7-2\nu)z + (1-2\nu)r_0] - (4\gamma_b + 2\gamma_a + 1 - 2\nu)(z + r_0 - 2nt)}{(z+r_0+nt)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-2\nu}{\nu} \quad \frac{1}{(nt+r_0)^2}\left[\frac{r_0 \quad 2nt}{(nt+r_0)^2} f + \left(\frac{z^2}{n^3 t^3} - \frac{1}{nt+r_0}\right)\exp\left(-\frac{z^2}{n^2 t^2}\right)\right]\right\},$$

$$f = \frac{1}{2\alpha}\left(\gamma_a - \frac{\nu}{1-\nu}\gamma_b\right).$$

Из совместного решения уравнений

$$\frac{\partial \tau_c}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_c}{\partial t} = 0$$

получим, что в точке $(t=\infty, \quad z=z_0)$ напряжение τ_c имеет максимум,

соответствующий статическому состоянию [2]. Но с каждым повышением порядка производной в знаменателе увеличиваются на единицу степени аргументов, в частности аргумента t, что вызывает уменьшение значения t, нужного для получения одинакового порядка отклонения функций от своих статических величин. Отсюда имеет место опережающее по сравнению с деформациями стремление напряжений τ_c к своим предельным статическим значениям и еще более быстрое установление после перемены знака напряжения его максимального значения в точке, соответствующей статическому состоянию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асатур К. Г. Оценочный расчет эффективности разрушения образцов горных пород гидромониторными струями. Изв. вузов, Горн. журнал, № 5, 1961.

2. Асатур К. Г. Осесимметричная динамическая деформация упругого полупространства от внешнего давления. Зап. ЛГИ, т. LX, вып. 1, 1970.

3. Schach W. Umlekung eines kreisformigen Flüssigkeitstrahles an einer ebenen Platte senkrecht zur Strömungsrichtung, Ingenieur Archiv, Band VI, Heft 1, 1935.

4. Климова Д. Н., Огурцов К. И. Об условиях приемлемости квазистатических решений при динамических воздействиях на границе упругого полупространства. Известия АН СССР, Механика твердого тела, № 6, 1970.