Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXVI, вып. 1, 1973 г.

К МЕТОДИКЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГОРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ

Б. Б. Кудряшов, А. Н. Саламатин, В. А. Чугунов

Закономерности температурного режима скважин и горных выработок, особенно в условиях изменения агрегатного состояния окружающих горных пород, описываются исключительно сложными аналитическими выражениями. Значительно упрощают решение этого круга задач понятия коэффициента нестационарного теплообмена k_τ [7] и коэффициента интенсификации теплообмена при агрегатном переходе $k_{агр}$ [3]. Однако имеющееся точное аналитическое выражение для k_τ крайне сложно, пригодно лишь для машинного счета и не позволяет осуществлять дальнейшие аналитические построения. Коэффициент $k_{агр}$ вообще не имеет аналитического выражения, а его значения, например, для условий горных выработок большого сечения, проветриваемых длительное время, находят по формуле, полученной способом моделирования на гидроинтеграторе [4].

Цель настоящей работы — получить достаточно простые и точные аналитические выражения для k_τ и $k_{агр}$ и показать возможность приближенного решения инженерных задач на их основе.

Рассмотрим распределение температуры в неограниченном массиве вокруг бесконечно длинного цилиндра радиуса R_0 при условиях, аналогичных использованным в работе [7]:

$$\frac{dT}{d\tau} = a\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad R_0 < r < \infty, \quad \tau > 0; \tag{1}$$

$$\tau = 0, \quad T = 0; \tag{2}$$

$$r = R_0, \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda}(T - t); \tag{3}$$

$$r \to \infty, \quad T \to 0. \tag{4}$$

Здесь T, t — температура породы массива и среды в цилиндре, °С; a, λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности породы массива соответственно, $м^2/ч$, $ккал/(м \cdot ч \cdot °С)$; α — коэффициент теплоотдачи при движении среды в цилиндре, $ккал/(м^2 \cdot ч \cdot °С)$; R_0 — радиус цилиндра, $м$; τ — время, $ч$.

По определению, данному в работе [7],

$$k_\tau = \alpha \frac{t - T}{t - T_0}. \tag{5}$$

В нашем случае $T=0$ (начальная температура).

Задачу (1)—(4) будем решать методом интегральных соотношений [1, 8], записав ее предварительно в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial T}{\partial R}, \quad 1<R<\infty, \quad \mathrm{Fo}>0; \tag{6}$$

$$\mathrm{Fo}=0, \quad T=0; \tag{7}$$

$$R=1, \quad \frac{\partial T}{\partial R} = \mathrm{Bi}(T-t); \tag{8}$$

$$R\to\infty, \quad T=0. \tag{9}$$

Здесь

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R_0^2}; \quad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha R_0}{\lambda}; \quad R=\frac{r}{R_0}.$$

Решение задачи (6)—(9) будем искать в виде

$$T = C_1 \ln\frac{R}{S} + C_2 + C_3 \frac{R}{S}, \tag{10}$$

где C_i $(i=1, 2, 3)$ — неизвестные коэффициенты; S — безразмерный радиус теплового влияния.

Для отыскания C_1, C_2, C_3 имеем следующие условия:

$$R=1, \quad \frac{\partial T}{\partial R} = \mathrm{Bi}(T-t);$$

$$T(\mathrm{Fo}, \ S(\mathrm{Fo}))=0;$$

$$\left.\frac{\partial t}{dR}\right|_{R=S(\mathrm{Fo})} = 0.$$

Определив с помощью этих условий C_i $(i=1, 2, 3)$, из уравнения (10) получим

$$T = -\mathrm{Bi}\, t \frac{S}{S-1} \cdot \frac{\left(\ln\frac{R}{S} + 1 - \frac{R}{S}\right)}{1+\mathrm{Bi}\left(\frac{S\ln S}{S-1}-1\right)}. \tag{11}$$

Для определения $S=S(\mathrm{Fo})$ возьмем первое интегральное соотношение в виде

$$\int_1^S TR \ln\frac{R}{x_0} dR = t\mathrm{Fo}, \tag{12}$$

$$x_0 = \exp\left(-\frac{1}{\mathrm{Bi}}\right).$$

Оно легко получается из уравнения (6), если последнее умножить на $R\ln\frac{R}{x_0}$ и проинтегрировать от 1 до S.

Подставляя (11) в (12), получим для $S=S(\mathrm{Fo})$ зависимость

$$\mathrm{Fo} = \frac{\mathrm{Bi}S}{S-1} \frac{\left(\frac{S^2\ln S}{12} - \frac{S^2-1}{4\mathrm{Bi}} + \frac{S^3-1}{3\mathrm{Bi}S} - \frac{S^3-1}{9S} + \frac{\ln S}{4} - \frac{1\,n\,S}{2\mathrm{Bi}}\right)}{1+\mathrm{Bi}\left(\frac{S\ln S}{S-1}-1\right)}. \tag{13}$$

Из соотношения (5) найдем выражение для k_τ

$$k_{(\tau)}=\alpha\varphi(S(\mathrm{Fo})), \tag{14}$$

$$\varphi(S(\mathrm{Fo}))=\frac{1}{1+\mathrm{Bi}\left(\frac{S\ln S}{S-1}-1\right)}. \tag{15}$$

Определим теперь коэффициент нестационарного теплообмена с учетом изменения агрегатного состояния (промерзания или протаивания) пород k_{τ_a}.

Рассмотрим задачу (для условий промерзания породы):

$$\frac{\partial T_a}{\partial\tau}=a_a\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T_a}{\partial r},\quad R_0<r<R(\tau),\ \tau>0; \tag{16}$$

$$\tau=0,\ T_a=0; \tag{17}$$

$$r=R_0,\ \frac{\partial T_a}{\partial r}=\frac{\alpha}{\lambda_a}(T_a-t); \tag{18}$$

$$r=R(\tau),\ T_a=0,\ \frac{\partial T_a}{\partial r}=\frac{q}{\lambda_a}\cdot\frac{\partial R}{\partial\tau}; \tag{19}$$

$$q=\rho w\gamma, \tag{20}$$

где w — активная весовая влажность породы, в долях единицы; γ — объемный вес породы, *кг/м*³; ρ — скрытая теплота кристаллизации (плавления), для воды $\rho=80$ *ккал/кг*; индекс «а» относится к зоне измененного агрегатного состояния.

Задачу (16)—(19) также решаем методом интегральных соотношений. Окончательно будем иметь

$$\mathrm{Fo}=-\frac{qa_a}{t\lambda_a}\left(\frac{S_a^2\ln S_a}{2}+\frac{S_a^2-1}{2\mathrm{Bi}}-\frac{S_a^2-1}{4}\right)+$$

$$+\mathrm{Bi}\varphi_a(S_a)\left(\frac{S_a^2-1}{4\mathrm{Bi}}-\frac{S_a^2-1}{4}+\frac{\ln S_a}{4}-\frac{\ln S_a}{2\mathrm{Bi}}\right); \tag{21}$$

$$\varphi_a(S_a(\mathrm{Fo}))=\frac{1}{1+\mathrm{Bi}\ln S_a}; \tag{22}$$

$$T_a=-\mathrm{Bi}t\frac{\ln\frac{R}{S_a}}{1+\mathrm{Bi}\ln S_a}. \tag{23}$$

Здесь

$$\mathrm{Fo}=\frac{a_a\tau}{R_0^2};\quad \mathrm{Bi}=\frac{\alpha R_0}{\lambda_a};\quad R=\frac{r}{R_0};$$

$S_a=\frac{R(\tau)}{R_0}$ — безразмерный радиус фронта изменения агрегатного состояния (замерзания) породы.

Из соотношения (5) находим

$$k_{\tau_a}=\alpha\varphi_a(S_a). \tag{24}$$

Коэффициент k_{τ_a} удобно записать в предложенном Ю. Д. Дядькиным [3] виде:

$$k_{\tau_a}=k_{\text{агр}}k_\tau, \tag{25}$$

где $k_{\text{агр}}$ — безразмерный коэффициент интенсификации теплообмена за счет изменения агрегатного состояния породы.

Из выражения (25) для $k_{агр}$ получим

$$k_{агр} = \frac{k_{\tau a}}{k_\tau} = \frac{\varphi_a(S_a)}{\varphi(S)}, \qquad (26)$$

где S и S_a определяются формулами (13) и (21), а φ и φ_a — формулами (15) и (22).

На рис. 1 графически представлена вычисленная по формуле (15) функция $\varphi(\tau)$, необходимая для определения k_τ по формуле (14):

$$k(\tau) = \alpha\varphi(\tau).$$

Формула (15) обладает очень высокой точностью и для расчетов на ЭЦВМ существенно удобнее, чем известная зависимость А. Н. Щербаня и О. А. Кремнева. Однако поскольку в нее входит не сама функция $S = S(\mathrm{Fo})$, а ее обратная, для практических расчетов в любом конкретном случае удобнее пользоваться полученной в работе [6] приближенной формулой

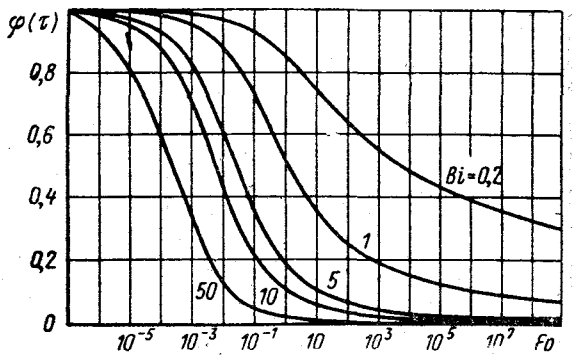


Рис. 1. Графики функции $\varphi(\tau)$ в пределах $\mathrm{Fo} = 10^{-6} \div 10^9$ при различных Bi

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{1 + \mathrm{Bi}\ln(1 + \sqrt{2\mathrm{Fo}})}, \qquad (27)$$

средняя погрешность которой не превышает 2%. При этом формулы (15), (13) могут служить в качестве эталонных.

При выводе формул для k_τ и $k_{агр}$ средняя температура циркулирующей среды считалась, как и в работе [7], постоянной (точнее, медленно изменяющейся со временем $\frac{\partial t}{\partial \tau} \ll 1$). В. Ф. Воропаевым [2] показано, что если при расчете используется среднее за период теплообмена значение температуры циркулирующей среды, погрешность, вносимая недоучетом ее фактического изменения, может быть скомпенсирована применением среднего по времени значения коэффициента нестационарного теплообмена.

Рассмотренные формулы для k_τ не позволяют получить аналитическое выражение для интегрального среднего его значения по времени. Лишенные указанного недостатка приближенные формулы, аппроксимирующие точную зависимость с любым заранее заданным приближением для отдельных достаточно больших интервалов значений Fo могут быть получены на основе приведенного в работе [5] общего выражения

$$k_\tau = \frac{\alpha}{1 + n\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}^{1/p}}, \qquad (28)$$

где $n > 0$, $p \geqslant 1$ (целое).

Например, для условий бурения скважин в подавляющем большинстве случаев пригодна зависимость

$$k_\tau = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{Bi}\sqrt[4]{\mathrm{Fo}}}. \qquad (29)$$

На рис. 2 графически сопоставляется приближенная функция $\varphi(\tau) = \frac{1}{1+\mathrm{Bi}\sqrt[4]{\mathrm{Fo}}}$, соответствующая выражению (29), с точной зависимостью.

Для больших значений Bi, характерных для условий бурения с жидкостной промывкой, из формулы (29) можно получить еще более простое выражение для k_τ

$$k_\tau = \frac{\lambda^{3/4}}{R_0^{1/2}}\left(\frac{c\gamma}{\tau}\right)^{1/4}, \qquad (30)$$

где c — удельная весовая теплоемкость породы, *ккал/(кг · °С)*.

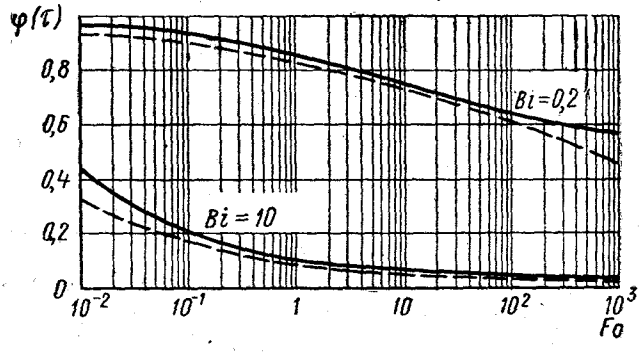


Рис. 2. Сопоставление расчетных значений $\varphi(\tau)$ по приближенной формуле (29) (пунктирные линии) с точными (сплошные линии) при Bi=0,2 и Bi=10

Для среднеинтегрального по времени коэффициента нестационарного теплообмена k'_τ из выражения (29) с помощью теоремы о среднем

$$k'_\tau = \frac{\alpha}{\mathrm{Fo}}\int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{d\mathrm{Fo}}{1+\mathrm{Bi}\sqrt[4]{\mathrm{Fo}}} \qquad (31)$$

получим выражение

$$k'_\tau = 4\alpha\left[\frac{1}{3b} - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^4}\ln\left(1+b\right)\right], \qquad (32)$$

$$b = \mathrm{Bi}\sqrt[4]{\mathrm{Fo}}.$$

Во всех случаях бурения скважин с жидкостной промывкой, а также при использовании газообразных агентов, когда $b = \mathrm{Bi}\sqrt[4]{\mathrm{Fo}} \geqslant 2$, точности технологических расчетов удовлетворяет простейшее соотношение

$$k'_\tau = \frac{4}{3}k_\tau. \qquad (33)$$

На рис. 3 графически представлены вычисленные на ЭЦВМ по формуле (26) значения $k_{\text{агр}}$ в зависимости от Fo при Bi=0,2; 2 и 10 и разных значениях

$$m = \frac{qa_a}{[t]\lambda_a} = \frac{w\rho}{[t]c_a}, \qquad (34)$$

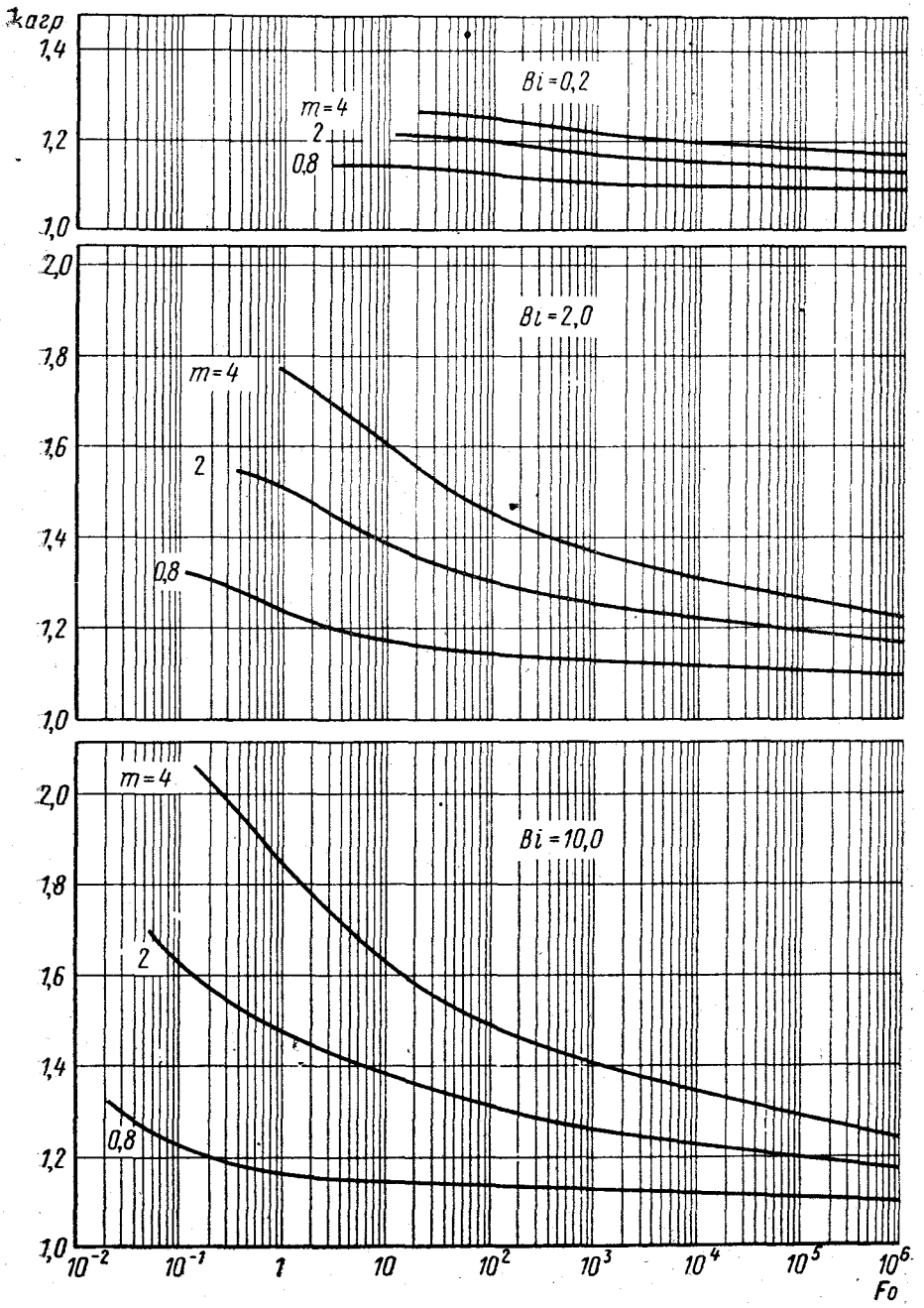


Рис. 3. Графики зависимости $k_{агр}$ от Fo при разных значениях Bi и m

где $[t]$ — абсолютное значение средней температуры циркулирующей среды; $c_а$ — удельная весовая теплоемкость породы в зоне измененного агрегатного состояния.

Анализ кривых на рис. 3 показывает, что коэффициент $k_{агр}$ является сложной функцией параметра Fo и при малых значениях последнего претерпевает тем большие изменения, чем выше значения Bi и m. Однако при значениях Fo>10 графики $k_{агр}=f(\text{Fo})$ быстро стремятся к некоторым постоянным пределам, достигаемым тем раньше, чем ниже влажность (льдистость) породы. Причем при достаточно больших Bi значения самих этих пределов определяются главным образом значениями m, зависящими прежде всего от влажности (льдистости). Все это подтверждает правомочность применения $k_{агр}$ в качестве поправочного множителя к коэффициенту нестационарного теплообмена для учета интенсификации теплообмена за счет фазовых переходов влаги [3] и целесообразность его определения по формулам, не учитывающим Bi и Fo [4].

Сравнение графиков на рис. 3 при Bi=10 с опытными данными [4], полученными методом гидротепловой аналогии, дает при Fo>10 и условиях, соответствующих принятым значениям m, очень близкое совпадение.

Полученное аналитическое выражение для $k_{агр}$ позволяет построить удобную для расчетов номограмму и получить достаточно точные упрощенные расчетные формулы.

Простота и универсальность понятий k_τ, k'_τ и $k_{агр}$ при наличии средств быстрого и достаточно точного определения их значений для конкретных условий позволяет существенно упростить решение ряда важных инженерных задач, связанных с прогнозом и регулированием температурного режима горных выработок и скважин. Так, например, для определения температуры в любой точке окружающего выработку (скважину) массива в любой момент времени при постоянной температуре циркулирующей среды и отсутствии фазовых переходов влаги вместо применения существующей точной, но весьма сложной зависимости можно воспользоваться следующим приемом. Из определения k_τ (для случая охлаждения массива) следует, что при $R=R_0$

$$k_\tau = -\frac{\lambda}{T_п - T}\cdot\frac{\partial T}{\partial R}. \qquad (35)$$

Предполагая постоянство по R величины $\frac{1}{T_п - T}\cdot\frac{\partial T}{\partial R}$, разделим переменные и, интегрируя в пределах от R_0 до R и от $T_{ст}$ до T, получим

$$\frac{T_п - T}{T_п - T_{ст}} = e^{-\frac{k_\tau}{\lambda}(R-R_0)}, \qquad (36)$$

где $T_п$ — естественная температура пород в массиве, °С; $T_{ст}$ — температура стенки скважины (выработки) в данный момент времени, °С.

Для количества тепла, переданного от массива к циркулирующей среде на единице длины скважины (горной выработки) в единицу времени, справедливо

$$Q=2\pi R_0\alpha(T_{ст}-t) \qquad (37)$$

и

$$Q=2\pi R_0 k_\tau (T_п - t). \qquad (38)$$

Приравняв (37) и (38), найдя выражение для $T_{ст}$ из формулы (36), для распределения температуры вокруг скважины (выработки) окончательно получим

$$T(R,\tau)=T_{п}-(T_{п}-t)\left(1-\frac{k_{\tau}}{\alpha}\right)e^{-\frac{k_{\tau}}{\lambda}(R-R_0)}. \qquad (39)$$

Если температура циркулирующей среды медленно изменяется во времени и известно ее среднее значение, в последних выражениях вместо k_{τ} следует подставлять k'_{τ}.

Для случаев промораживания или протаивания окружающих пород, подставив в формулу (39) вместо k_{τ} произведения $k_{агр}\ k_{\tau}$ или $k_{агр}\ k'_{\tau}$ (в зависимости от конкретных условий), можно получить выражение, приближенно справедливое для распределения температуры в мерзлой или немерзлой зонах (при $R \ll R_{агр}$, где $R_{агр}$ — радиус фронта изменения агрегатного состояния).

Формулы типа (39) очень просты и удобны для практических расчетов, связанных, например, с определением температурных напряжений, зоны теплового влияния и пр.

Положив в формуле (39) $R=R_{агр}$, $T(R,\tau)=0°C$ и вместо k_{τ} подставив произведение $k_{агр}\cdot k_{\tau}$, получим выражение для радиуса зоны изменения агрегатного состояния при постоянной температуре циркулирующей среды

$$R_{агр}=\frac{\lambda_a}{k_{агр}\,k_{\tau}}\ln\frac{(T_{п}-t)\left(1-\dfrac{k_{агр}\,k_{\tau}}{\alpha}\right)}{T_{п}}+R_0. \qquad (40)$$

Еще более простое выражение для переменного во времени радиуса зоны изменения агрегатного состояния можно получить на основе балансового уравнения для тепла, поглощенного на плавление льда (кристаллизацию воды) за период протаивания (промораживания)

$$\Sigma Q_{агр}=2\pi R_0(k_{агр}-1)k'_{\tau}(t-T_{п})\tau=\pi(R^2_{агр}-R^2_0)\rho w\gamma, \qquad (41)$$

откуда для случая протаивания

$$R_{агр}=\sqrt{R_0\left[\frac{2(k_{агр}-1)k'_{\tau}(t-T_{п})\tau}{\rho w\gamma}\right]+R_0}. \qquad (42)$$

В условиях промораживания изменится знак дроби под корнем.

Наличие двух независимых приближенных решений для нестационарного радиуса зоны измененного агрегатного состояния пород открывает еще один путь для определения $k_{агр}$ в конкретных условиях. Приравняв выражения (40) и (42), можно получить трансцендентное уравнение, позволяющее при прочих известных условиях вычислить методом последовательных приближений значение $k_{агр}$.

Аналогичные приемы возможны и целесообразны в упрощениях постановки и решения широкого круга задач, связанных с прогнозом, нормализацией и регулированием температурного режима скважин и горных выработок на различных этапах их сооружения и эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. М., Изв. АН СССР, ОТН, 1954.

2. Воропаев А. Ф. Теория теплообмена рудничного воздуха и горных пород в глубоких шахтах. М., «Недра», 1966.

3. Дядькин Ю. Д. Метод теплового расчета подземных выработок в толще многолетнемерзлых пород. — В сб.: Тепловые процессы в мерзлых горных породах. М., «Наука», 1964.

4. Дядькин Ю. Д., Буденный Ю. А. Теоретические и экспериментальные основы прогноза теплового режима шахт Севера. Записки Ленингр. горн. ин-та, т. 57, вып. 1. М., «Недра», 1968.

5. Кудряшов Б. Б. К расчету нестационарного теплообмена между средой в горной выработке или скважине и окружающим породным массивом. — В сб.: Проблемы разработки месторождений полезных ископаемых Севера. (Тезисы докладов научн.-техн. конференции). Изд. Ленингр. горн. ин-та, 1970.

6. Саламатин А. Н., Пудовкин М. А. Об охлаждении нефти при ее движении по скважине. — В сб. аспирантских работ. Изд. Казанск. гос. ун-та, 1971.

7. Щербань А. Н., Кремнев О. А. Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт. Т. 1. АН УССР. Киев, 1959.

8. Goodman T. R. Heat transfer integral and its application to problems involving a change of phase. — Trans. ASME, v. 80, № 2, 1958.