Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

КИНЕМАТИКА ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВНУТРИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РУДОСПУСКА

В. Я. Бриль, А. А. Кулешов

Для прогнозирования мест наибольшего износа стенок рудоспуска, отыскания кинетической энергии падающих кусков руды, возможной степени дробления материала при перепуске и для решения некоторых других вопросов необходимо знать кинематику движения отдельного куска руды в рудоспуске.

Не учитывая сопротивления воздуха и размеров падающего тела, поставим задачу следующим образом.

Пусть ось полубесконечного круглого цилиндра радиусом R совпадает с вертикальной осью oy цилиндрической системы координат (ρ, φ, y), где ρ — расстояние произвольной точки от оси oy; φ — «широта» этой точки — угол между плоскостью, проходящей через эту точку и ось oy, и начальной плоскостью, проходящей через ось oy и полярную ось ox; y — расстояние между горизонтальными плоскостями, проходящими через рассматриваемую точку и начало координат.

Изучается свободное падение материальной точки, брошенной внутрь этого цилиндра с начальной скоростью $\bar{v}_0$ под углом α_0 к горизонту и под углом β_0 между вертикальной плоскостью, проходящей через $\bar{v}_0$, и плоскостью $\varphi = 0$ (рис. 1, *а*). Без ограничения общности можно считать, что точка «вбрасывания» имеет координаты $A_0\ (R, 0, 0)$.

Скорость v материальной точки в любой момент времени можно разложить на вертикальную $v_в$ и горизонтальную $v_г$ составляющие, последняя, кроме того, может быть разложена на радиальную v_R и касательную $v_к$ составляющие (рис. 1, *б*).

В результате имеем следующее разложение по трем взаимно перпендикулярным осям:

$$\bar{v} = v_R\bar{i} + v_к\bar{j} + v_в\bar{k}. \qquad (1)$$

Обозначим индексом n величины, соответствующие началу n-го звена траектории, а индексом n и штрихом — те же величины, но соответствующие концу n-го звена ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$), где N — общее число соударений, величина конечная при конечной высоте цилиндра H.

Итак, дано: v_0, α_0, β_0 — числа, характеризующие величину и направление начальной скорости[1]; $\rho_0 = R$, $\varphi_0 = 0$, $y_0 = 0$, $t_0 = 0$ — пространственно-временные координаты начальной точки траектории движения; R, H — геометрические характеристики цилиндра, соответственно радиус

[1] Все углы, встречающиеся в задаче, выражаются в радианах.

и высота; K — коэффициент отражения материальной точки от стенок цилиндра.

Определить: v_n, $v_{R,\,n}$, $v_{к,\,n}$, $v_{в,\,n}$ — величину скорости и трех ее проекций непосредственно после каждого соударения с цилиндром; ρ_n, φ_n, y_n, t_n — пространственно-временные координаты всех точек соударения; N — общее количество соударений с цилиндром конечной высоты H.

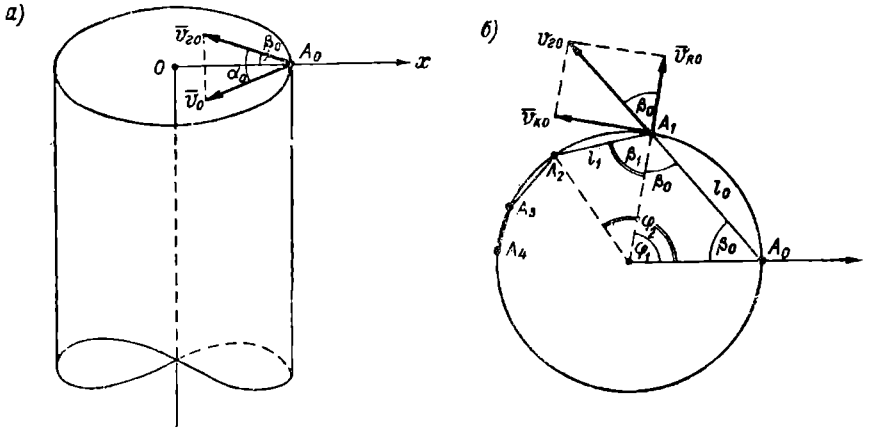


Рис. 1. Схема начального участка:
а — общий вид, *б* — проекция на горизонтальную плоскость

Предположим, что составляющие скорости, лежащие в плоскости, касательной к цилиндру в точке соударения, в процессе удара не меняются, т. е.

$$v_{к,\,n} = v'_{к,\,n-1};\quad v_{в,\,n} = v'_{в,\,n-1}. \tag{2}$$

Нормальная к поверхности цилиндра составляющая по определению коэффициента отражения K

$$v_{R,\,n} = K v'_{R,\,n-1}. \tag{3}$$

Кроме того, необходимо установить связь между составляющими скоростей в начале и конце n-го звена траектории. Если нет сопротивления воздуха, то

$$v'_{г,\,n-1} = v_{г,\,n-1}.$$

Далее из рис. 2 усматриваем

$$v'_{к,\,n-1} = v'_{г,\,n-1} \sin\beta_{n-1} = v_{г,\,n-1} \sin\beta_{n-1} = v_{к,\,n-1},$$

т. е.

$$v'_{к,\,n} = v_{к,\,n-1}. \tag{4}$$

Аналогично

$$v'_{R,\,n-1} = v_{R,\,n-1}. \tag{5}$$

Из (4) следует, что касательные составляющие скорости в начале и конце любого звена одинаковы, из (2) — что касательная составляющая в начале следующего звена равна этой же составляющей в конце предыдущего. Следовательно, касательные составляющие скорости при всех соударениях одинаковы

$$v_{к,\,n} = v_{к,\,n-1} = v_{к,\,n-1} = v_{к,\,n-2} = \quad = v_{к0} = v_{г0} \sin\beta_0 = v_0 \cos\alpha_0 \sin\beta_0,$$

т. е.

$$v_{к,\,n} = v_0 \cos\alpha_0 \sin\beta_0. \tag{6}$$

Из соотношений (3) и (5) вытекает

$$v_{R,n} = Kv_{R,n-1} = K^2 v_{R,n-2} = K^3 v_{R,n-3} = \qquad K^n v_{R,0} = K^n v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0,$$

т. е.

$$v_{R,n} = K^n v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0. \tag{7}$$

Наконец, вертикальная составляющая скорости $v_в$ в момент n-го соударения (в связи с ее независимостью от формы траектории)

$$v_{в,n} = v_{в,0} + gt_n,$$

т. е.

$$v_{в,n} = v_0 \sin\alpha + gt_n. \tag{8}$$

Зная все составляющие скорости в момент n-го соударения, найдем

$$v_n = \sqrt{v_{к,n}^2 + v_{R,n}^2 + v_{в,n}^2}. \tag{9}$$

Остается найти пространственно-временные координаты всех точек контакта тела с цилиндром.

Как следует из рис. 2 и формулы (2),

$$\operatorname{tg}\beta_n = \frac{v_{к,n}}{v_{R,n}}.$$

Тогда, принимая во внимание (6) и (7),

$$\operatorname{tg}\beta_n = \frac{1}{K^n}\operatorname{tg}\beta_0$$

или

$$\beta_n = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta_0}{K^n}. \tag{10}$$

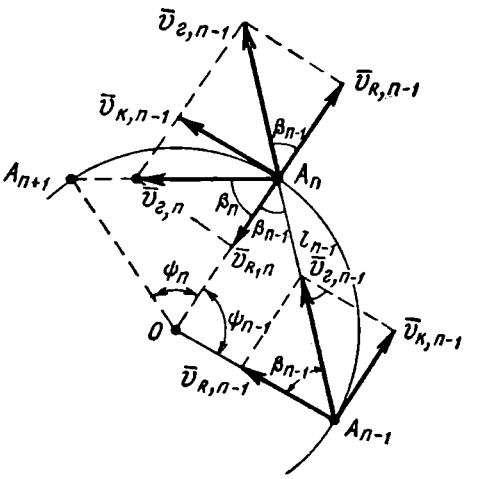


Рис. 2. Проекция на горизонтальную плоскость n-го звена траектории

Для проекции l_n n-го звена траектории на плоскость $y=0$, центрального угла ψ_n, опирающегося на эту проекцию, и горизонтальной составляющей скорости $v_{г,n}$ из рис. 2 с учетом (10), (2), (6) и (7) соответственно имеем

$$l_n = 2R\cos\beta_n = \frac{2R}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_n}} = \frac{2RK^n}{\sqrt{K^{2n}+\operatorname{tg}^2\beta_0}}, \tag{11}$$

$$\psi_n = \pi - 2\beta_n = \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta_0}{K^n}, \tag{12}$$

$$v_{г,n} = \sqrt{v_{к,n}^2 + v_{R,n}^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha_0\sin^2\beta_0 + K^{2n}v_0^2\cos^2\alpha_0\cos^2\beta_0},$$

откуда

$$v_{г,n} = v_0\cos\alpha_0\cos\beta_0\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta_0 + K^{2n}}. \tag{13}$$

Для координаты φ_n имеем, очевидно,

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n-1}\psi_i,$$

что, в совокупности с (12), дает

$$\varphi_n = n\pi - 2\sum_{j=0}^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\beta_0}{K^j}. \tag{14}$$

Обозначив τ_n время движения на n-м звене трактории, получим с учетом (11) и (13)

$$\tau_n = \frac{l_n}{v_{\text{г}, n}} = \frac{2RK^n}{v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0 (K^{2n} + \operatorname{tg}^2\beta_0)}.$$

Тогда, очевидно, для момента t_n n-го соударения имеем соотношение

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i = \frac{2R}{v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{K^i}{K^{2i} + \operatorname{tg}^2\beta_0}. \tag{15}$$

Поскольку для любого n

$$\rho_n = R, \tag{16}$$

то остается определить лишь глубину y_n n-го удара

$$y_n = v_{\text{в}, 0} t_n + \frac{g t_n^2}{2},$$

или

$$y_n = v_0 t_n \sin\alpha_0 + \frac{g t_n^2}{2}, \tag{17}$$

где t_n — из (15).

Счет прекращается, как только для y_n, найденного по (17), выполняется условие $y_n \geqslant H$.

Последнему номеру n, для которого выполняется обратное неравенство $y_n \leqslant H$, присваивается значение

$$n = N. \tag{18}$$

Задача решена.

Итак, расчет ведется в следующем порядке: φ_n, t_n, y_n, $v_{\text{к}, n}$, $v_{R, n}$, $v_{\text{в}, n}$, v_n, N, соответственно по формулам (14), (15), (17), (6), (7), (8), (9), (18).

Замечание 1. Задача о движении тела в рудоспуске прямоугольного сечения в плоскости, перпендикулярной отражающим стенкам — частный случай решенной задачи, соответствующий условию

$$\beta_0 = 0. \tag{19}$$

Тогда

$$\varphi | = n\pi,$$

$$t_n = \frac{2R}{v_0 \cos\alpha_0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{K^i} = \frac{2R}{v_0 \cos\alpha_0} \frac{1 - K^n}{K^{n-1}(1 - K)};$$

$$y_n = v_0 t_n \sin\alpha_0 + \frac{g t_n^2}{2};$$

$$v_{\text{к}, n} = v_0 \cos\alpha_0 \sin 0 = 0;$$

$$v_{R, n} = v_0 \cos\alpha_0 K^n;$$

$$v_{\text{в}, n} = v_0 \sin\alpha_0 + g t_n.$$

Замечание 2. Для случая идеально упругих ударов имеем $K = 1$, и формулы счета упрощаются

$$\varphi_n = n(\pi - 2\beta_0),$$

т. е.

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = \quad = \psi_{n-1} = \pi - 2\beta_0;$$

$$t_n = \frac{2R}{v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0} \frac{n}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_0} = \frac{2Rn \cos\beta_0}{v_0 \cos\alpha_0},$$

так как

$$\tau_0 = \tau_1 = \quad = \tau_{n-1} = \frac{2R}{v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0)},$$

$$v_{R,n} = v_{R,n-1} = \quad = v_{R,0} = v_0 \cos\alpha_0 \cos\beta_0,$$

y_n и $v_{в,n}$ сохраняют форму соответственно (17) и (8).

Пример расчета[1]

Дано: $l_0 = 5$ *м*, $f = 0{,}55$, $\alpha_0 = 60°$, $\beta_0 = 30°$, $d_p = 6$ *м*, $H = 600$ *м*, $K = 0{,}3$. Найти координаты пятой точки соударения и составляющие скорости в момент пятого соударения:

$$v_0 = \sqrt{2al_0} = \sqrt{2 \cdot 5{,}83 \quad 5} = 7{,}65 \text{ м/сек};$$

$$\varphi_5 = 5 \quad 180° - 2\left(30° + \operatorname{arctg}\frac{0{,}577}{0{,}3} + \operatorname{arctg}\frac{0{,}577}{0{,}3^2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg}\frac{0{,}577}{0{,}3^3} + \operatorname{arctg}\frac{0{,}577}{0{,}3^4}\right) = 199° 42';$$

$$t_5 = \frac{6 \cdot 2}{7{,}65 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1 + 0{,}335} + \frac{0{,}3}{0{,}3^2 + 0{,}335} + \frac{0{,}3^2}{0{,}3^4 + 0{,}335} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}3^3}{0{,}3^6 + 0{,}335} + \frac{0{,}3^4}{0{,}3^8 + 0{,}335}\right) = 3{,}3 \text{ сек};$$

$$k_5 = 7{,}65 \cdot 3{,}3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9{,}8 \cdot 3{,}3^2}{2} = 75{,}3 \text{ м};$$

$$v_{к,5} = 7{,}65 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}91 \text{ м/сек}; \quad v_{R,5} = 7{,}65 \cdot 0{,}5\frac{\sqrt{3}}{2}0{,}3^5 = 0{,}008 \text{ м/сек};$$

$$v_{в,5} = 7{,}65\frac{\sqrt{3}}{2} + 9{,}8 \cdot 3{,}3 = 38{,}9 \text{ м/сек}.$$

Приведенная методика расчета позволяет быстро и точно определить количество и места соударений материальной точки со стенками цилиндра без последовательного пересчета параметров всех предыдущих соударений.

Практическое значение предлагаемого метода состоит в том, что с его помощью можно рассчитать параметры движения кусков руды в глубоком вертикальном рудоспуске. В свою очередь, знание параметров движения руды при перепуске по глубоким рудоспускам необходимо для определения скорости движения, кинетической энергии падающих кусков руды и мест их соударений со стенками рудоспуска для прогнозирования мест наибольшего его износа.

Зная физико-механические свойства пород, в которых пройден рудоспуск, и транспортируемой руды, можно получить, пользуясь выведенными формулами, численные значения расстояния места соударения куска руды со стенкой рудоспуска от его устья через любой интервал времени, скорость движения куска руды в момент соударения, а по известной массе куска — и силу удара его о стенку.

---

[1] Обозначения взяты из работы В. В. Ржевского и др. Карьерные рудоспуски. Недра, 1969.