Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

О ВЫБОРЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Э. И. Иванюта, М. А. Узкая

Точность решений, полученных любым из известных приближенных методов, зависит от того, насколько удачно выбраны функции, аппроксимирующие это решение.

Естественно ожидать, что при сохранении в рядах разложения искомого решения даже минимального числа членов ряда (а именно этот случай и представляет наибольший интерес для практических расчетов) приближенное решение будет несущественно отличаться от точного, если аппроксимирующие функции удовлетворяют всем граничным условиям. Однако не всегда удается легко и просто выбрать такую функцию, и именно стремление облегчить эту задачу привело к созданию целой серии различного рода модификаций классических методов Релея-Ритца и Бубнова-Галеркина.

В каждом из этих случаев на аппроксимирующие функции уже не накладываются жесткие требования удовлетворения всем граничным условиям. Данное обстоятельство позволяет существенно расширить класс функций, аппроксимирующих решение.

Большой интерес представляет также вопрос о влиянии на результаты расчета, полученного по приближенным формулам, аппроксимирующих функций, удовлетворяющих, помимо основных граничных условий рассматриваемой задачи, еще и дополнительным (или, по терминологии А. А. Курдюмова [1], «лишним») условиям. Этот вопрос практически не исследован. Он четко поставлен А. А. Курдюмовым, однако иллюстрация его на единственном примере шарнирно опертого стержня не дает правильного ответа, так как им ошибочно утверждается, что рассматриваемая функция удовлетворяет всем основным граничным условиям. Поэтому погрешность полученного в работе результата может быть объяснена не тем, что выбранная функция удовлетворяет лишним граничным условиям, как утверждает автор, а тем, что удовлетворены не все основные граничные условия.

При решении сложных задач теории колебаний в качестве аппроксимирующих наиболее часто употребляются балочные функции, поэтому в основном и разрабатывались способы аппроксимации форм свободных колебаний призматических стержней при различных граничных условиях.

Представляется заманчивым получить некоторые стандартные формы, удовлетворяющие всем возможным вариантам граничных условий.

В литературе известные такие попытки [3, 4]. Авторы этих работ шли разными путями и предложили формулы, применяемые, однако, только для одного варианта граничных условий — для консоли. Вопрос о выборе аппроксимирующих функций для безопорного стержня рассмотрен лишь

П. Ф. Папковичем [2], причем предложенная там функция не удовлетворяет одному из основных граничных условий.

Предлагаемые нами формулы позволяют выбрать аппроксимирующие функции для любого варианта граничных условий призматического стержня, опирающегося на жесткие опоры. При симметричном опирании возможны всего три варианта условий: жесткое защемление, свободное опирание и свободный край. Все эти условия при $x = 0$ и $x = l$ соответственно записываются следующим образом:

$$v(x) = v'(x) = 0; \tag{1}$$

$$v'(x) = v''(x) = 0; \tag{2}$$

$$v''(x) = v'''(x) = 0. \tag{3}$$

При несимметричной заделке имеет место комбинация из перечисленных условий.

Рассмотрим в качестве аппроксимирующих функций степенные полиномы

$$v(x) = x^n - kx^{n-i}l^i + k_1x^{n-s}l^s \tag{4}$$

Определим связь между показателем степени полинома n и коэффициентами k, k_1, i и s из граничных условий при $x = l$. Тогда при подстановке (4) в (1), (2) и (3) получим зависимости
для жесткого защемления

$$k_1 = \frac{i}{s-i}; \tag{5}$$

$$k = 1 + k_1; \tag{6}$$

для свободного опирания

$$k_1 = \frac{i(2n-i-1)}{s(2n-s-1) - s(2n-i-1)}; \tag{7}$$

$$k = 1 + k_1;$$

для безопорного конца

$$k_1 = \frac{n(n-1)i}{(n-s(n-s-1)(s-i)}; \tag{8}$$

$$k = \frac{n(n-1)s}{(n-i)(n-i-1)(s-i)}. \tag{9}$$

Задавая числовые значения величинам i, s и n, получим бесконечное число аппроксимирующих функций при различных вариантах закрепления призматического стержня, однако для практических расчетов достаточно ограничиться значением $n \leqslant 6$.

Для безопорной балки нужно в формуле (4) добавить

$$xl^{n-1} + k_2l^n,$$

где k_2 — коэффициент, определяемый из условий уравновешенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюмов А. А. Вибрация корабля. Судпромгиз, 1962.
2. Папкович П. Ф. К вопросу о выборе фундаментальных функций в методе Релея-Ритца. В кн. «Труды по прочности корабля». Судпромгиз, 1956.
3. Duncan W. I. Br. ARC, R. and M., 1947.
4. Williams D. Br. ARC, R. and M., 1937.