Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

ОБ ОЦЕНКЕ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГИРОТАХОМЕТРА ПРИ СЛОЖНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ОСНОВАНИЯ

М. А. Узкая

Гиротахометр предназначен для замера угловой скорости вращения подвижного основания вокруг одной из осей, которую называют входной или измерительной. Поставленная задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Однако гиротахометр реагирует на вращение и вокруг других осей оснований, так называемых посторонних. При этом наблюдаются постоянные, точнее, медленно меняющиеся отклонения или уводы, которые никак не могут быть объяснены свойствами линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

В такой постановке задача исследовалась в ряде работ [1—4]. Одни из авторов рассматривают перемещения основания вокруг входной оси и оси ротора, необоснованно не учитывая влияния на погрешность прибора перемещения вокруг выходной оси. Другие, наоборот, оценивают погрешность только от дополнительного перемещения основания вокруг выходной оси. Наиболее общая постановка задачи дана Я. Л. Лунцем [2], однако и в его работе проведено лишь качественное исследование и не оценено влияние на погрешность гиротахометра каждой из посторонних осей отдельно.

Чтобы оценить погрешность гиротахометра от влияния вращения его вокруг посторонних осей, рассмотрим движение прибора при сложном возмущении его основания.

Уравнение движения гиротахометра имеет вид

$$A_c\ddot{\alpha} + f\dot{\alpha} + a\alpha = -H\omega_x + R\omega_x\omega_y - A_c\omega_z - H\alpha\omega_y, \tag{1}$$

где $A_c = A + A_1 = \text{const}$; $R = A + A_1 - B_1 = \text{const}$; ω_x, ω_y, ω_z — угловые скорости вращения основания соответственно вокруг выходной, входной и оси ротора, причем A — экваториальный момент инерции ротора; A_1, B_1 — моменты инерции кожуха гиротахометра; H — кинетический момент.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\ddot{\alpha} + 2h\dot{\alpha} + \omega_{\text{св}}^2\alpha = -q\omega_x - q\alpha\omega_y + p\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z, \tag{2}$$

где

$$2h = \frac{f}{A_c},\quad \omega_{\text{св}}^2 = \frac{a}{A_c},\quad q = \frac{H}{A_c},\quad p = \frac{R}{A_c}. \tag{3}$$

Для решения уравнения (2) представим искомую функцию α в виде разложения

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots, \tag{4}$$

где α_1 и α_2 — поправки к α_0, имеющие соответственно первый и второй порядок малости ($\alpha_0 = \alpha_{ст}$ — статическое отклонение).

Подставив разложение (4) в уравнение (2), получим уравнения первого и второго приближения

$$\ddot{\alpha}_1 + 2h\dot{\alpha}_1 + \omega_{св}^2\alpha_1 = -q\omega_x - \dot{\omega}_z; \tag{5}$$

$$\ddot{\alpha}_2 + 2h\dot{\alpha}_2 + \omega_{св}^2\alpha_2 = -q\alpha_1\omega_y + p\omega_x\omega_y. \tag{6}$$

Заметим, что левые части уравнений первого и второго приближения имеют одинаковый вид, отличаются только их правые части.

Рассмотрим реакцию гиротахометра на гармонические колебания основания, т. е. будем считать углы θ, ψ и φ изменяющимися следующим образом:

$$\begin{gathered}\theta = \rho_\theta \sin(\nu t + \delta_\theta);\\ \psi = \rho_\psi \sin(\nu t + \delta_\psi);\\ \varphi = \rho_\varphi \sin(\nu t + \delta_\varphi),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\text{причем}\quad \dot{\theta} = \omega_y, \quad \dot{\psi} = \omega_z, \quad \dot{\varphi} = \omega_x.$$

Тогда правая часть уравнения (5) запишется

$$-q\omega_x - \dot{\omega}_z = -q\rho_\varphi \nu \cos(\nu t + \delta_\varphi) + \nu^2\rho_\psi \sin(\nu t + \delta_\psi). \tag{8}$$

Рассматривая только установившееся движение, частное решение уравнения (5) представим с учетом (8) в виде

$$\alpha_1 = \frac{-q\rho_\varphi \nu \cos(\nu t + \delta_\varphi - \varepsilon) + \nu^2\rho_\psi \sin(\nu t + \delta_\psi \varepsilon)}{\sqrt{(\omega_{св}^2 - \nu^2)^2 + 4h^2\nu^2}} \tag{9}$$

или, введя безразмерные коэффициенты

$$z = \frac{\nu}{\omega_{св}}; \quad h_0 = \frac{h}{\omega_{св}}; \quad q_0 = \frac{q}{\omega_{св}}; \quad D(z) = \sqrt{(1-z^2)^2 + 4h_0z^2}, \tag{10}$$

запишем окончательно решение первого приближения

$$\alpha_1 = \frac{1}{D(z)}\left[-q_0\rho_\varphi z \cos(\nu t + \delta_\varphi - \varepsilon) + z^2\rho_\psi \sin(\nu t + \delta_\psi - \varepsilon)\right], \tag{11}$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2h_0z}{1-z^2}.$$

Как и следовало ожидать, наложение гармонических колебаний основания на его систематическое вращение с угловой скоростью ω вокруг измерительной оси приводит к вынужденным колебаниям гиротахометра с частотой ν около равновесного положения $\alpha = \alpha_0$. Величина z характеризует отношение частоты вынужденных колебаний основания к частоте собственных колебаний гиротахометра. Если $z < 1$, то такие колебания будем называть низкочастотными.

Перейдем к уравнению второго приближения (6). Правая часть этого уравнения содержит гармонические слагаемые и одно постоянное. Гармонические члены внесут некоторые малые поправки к решению (11), и ими вполне можно пренебречь.

Наибольший интерес представляет постоянное слагаемое в правой части уравнения (6). В установившемся движении этому слагаемому отвечает некоторый сдвиг $\Delta\alpha$ в показаниях гиротахометра, определяемый как частное решение уравнения (6):

откуда

$$\omega_{св}^2 \Delta\alpha_2 = C,$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{C}{\omega_{св}^2}. \qquad (12)$$

Перейдем к определению постоянной C. Обозначим символом $\langle x \rangle$ осредненное по времени значение x. Тогда в правой части уравнения (6) необходимо заранее выделить отдельные постоянные слагаемые. Для синхронных колебаний имеем

$$\langle \omega_x \omega_y \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi}\dot{\theta}\, dt = \rho_\varphi \rho_\theta \nu^2 \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(\nu t + \delta_\varphi) \cos(\nu t + \delta_\theta)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \rho_\theta \rho_\varphi \nu^2 \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta),$$

аналогично получим

$$\langle \alpha_1 \omega_1 \rangle = \langle \alpha_1 \dot{\theta} \rangle = \left\langle \frac{\rho_\theta \nu}{D(z)} [- q_0 \rho_\varphi z \cos(\nu t + \delta_\theta) \cos(\nu t + \delta_\varphi - \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + z^2 \rho_\psi \cos(\nu t + \delta_\theta) \sin(\nu t + \delta_\varphi - \varepsilon)] \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho_\theta \nu}{D(z)} [- q_0 \rho_\varphi z \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta - \varepsilon) + \rho_\varphi z^2 \sin(\delta_\psi - \delta_\theta - \varepsilon)].$$

Подставляя полученные выражения в правую часть уравнения (6), найдем величину сдвига нуля

$$2\Delta\alpha_2 = 2\frac{C_2}{\omega_{св}} = \frac{q}{\omega_{св}} \rho_\theta \frac{\nu}{\omega_{св}} \frac{1}{D(z)} [- q_0 \rho_\varphi z \cos(\delta\varphi - \delta_\theta - \varepsilon) +$$

$$+ \rho_\psi z^2 \sin(\delta_\psi - \delta_\theta - \varepsilon)] + p \rho_\theta \rho_\varphi \frac{\nu^2}{\omega_{св}^2} \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta) \qquad (13)$$

или, учтя обозначения (10), получим

$$2\Delta\alpha_2 = - z^2 \frac{q_0^2}{D(z)} \rho_\theta \rho_\varphi \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta - \varepsilon) + z^2 p \rho_\theta \rho_\varphi (\delta_\varphi - \delta_\theta) +$$

$$+ z^3 \rho_\theta \rho_\psi \frac{q_0}{D(z)} \sin(\delta_\psi - \delta_\theta - \varepsilon).$$

Запишем это выражение иначе

$$\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_2' + \Delta\alpha_2'' + \Delta\alpha_2''',$$

где $\Delta\alpha_2$ — суммарная абсолютная погрешность;

$\Delta\alpha_2' = \frac{1}{2} \frac{z^2}{D(z)} q_0^2 \rho_\theta \rho_\varphi$ — абсолютная погрешность от перемещения основания относительно выходной оси;

$\Delta\alpha_2'' = \frac{1}{2} z^2 p \rho_\theta \rho_\varphi$ — абсолютная погрешность от перемещения основания относительно оси ротора;

$\Delta\alpha_2''' = \frac{1}{2} \frac{z^3}{D(z)} q_0 \rho_\theta \rho_\psi$ — абсолютная погрешность от совместного перемещения основания относительно входной и выходной осей.

Зная что статическое отклонение прибора

$$\alpha_{ст} = \frac{H}{a} \omega_{x_{max}} = \frac{H}{a} \rho_\varphi = q_0 z \rho_\varphi,$$

получим следующие относительные погрешности прибора:

$$\delta_2 = \frac{\Delta\alpha}{\alpha_{ст}} 100\%;$$

$$\delta_2' = \frac{\Delta\alpha_2'}{\alpha_{ст}} 100\% = \frac{1}{2}\frac{z}{D(z)} q_0\rho_\theta 100\%;$$

$$\delta_2'' = \frac{\Delta\alpha_2''}{\alpha_{ст}} 100\% = \frac{1}{2} zp\rho_\theta 100\%;$$

$$\delta_2''' = \frac{\Delta\alpha_2'''}{\alpha_{ст}} 100\% = \frac{1}{2}\frac{z^2}{D(z)} q_0 \frac{\rho_\theta\rho_\psi}{\rho_\varphi} 100\%.$$

По этим формулам с помощью ЭЦВМ для реальных значений параметров гиротахометра

$$q_0 = 10;\ p = 1;\ \rho_\theta = \rho_\varphi = \rho_\psi = 1^\circ = 0{,}00175\ рад$$

вычислены его погрешности при сложном возмущении основания в зависимости от отношения частоты возмущения к частоте свободных колебаний прибора.

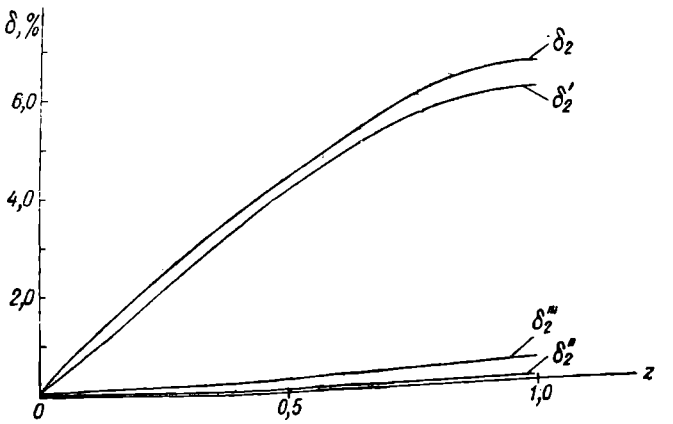


Рис. 1. Относительные погрешности гиротахометра при низкочастотных колебаниях основания

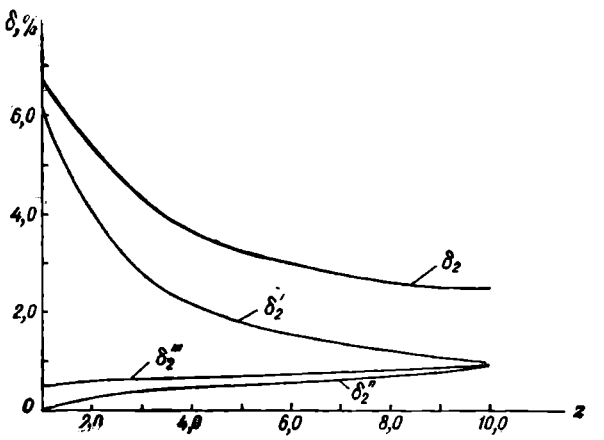


Рис. 2. Относительные погрешности гиротахометра при высокочастотных колебаниях основания

Проведенные расчеты (рис. 1, 2) позволяют сделать следующие выводы:

1) наибольшую погрешность δ_2' при низкочастотных и высокочастотных колебаниях основания дает перемещение вокруг входной оси;

2) при низкочастотных колебаниях основания погрешность δ_2'' пренебрежимо мала на всем диапазоне изменения частот;

3) в работе [4] высказано предположение, что при высоких частотах погрешность δ_2''' должна стать преобладающей, однако (см. рис. 2) даже при очень высоких частотах колебаний основания ($z > 5$) она становится всего лишь соизмеримой с погрешностью δ_2'.

Легко показать, что для асинхронных колебаний основания погрешность гиротахометра равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коржов А. П. О систематических «уводах» в некоторых гироскопических приборах. В сб. «Вопросы прикладной гироскопии», вып. 1, 1958.

2. Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Судостроение, 1968.

3. Мондер Л. Вопросы динамики карданова подвеса гироскопов. В сб. «Проблемы гироскопии». Мир, 1967.

4. Питмен Дж., Гудсон Р. Поведение гироскопических приборов при воздействии случайной вибрации. В сб. «Проблемы гироскопии». Мир, 1967.