Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ПОЛУСФЕРЫ С МАССОЙ, ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПО ЭКВАТОРУ

Н. Н. Казаринова

Рассмотрим задачу о вынужденных симметричных колебаниях тонкой полусферы радиуса R с массой M, жестко закрепленной по экватору, под действием нормальной нагрузки постоянной поверхностной плотности P. Фронт волны нагрузки распространяется с постоянной скоростью v (рис. 1). Вынужденные колебания сферической оболочки описываются системой [2]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{R^2(1-\nu^2)\gamma}{E}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -a\frac{\partial}{\partial\alpha}\Delta W + (1+a)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \\
&\qquad + (\nu - 1 + a\nu - 3a)\frac{\partial W}{\partial\alpha} + (1+a)(1-\nu)U; \\
&\frac{R^2(1-\nu^2)\gamma}{E}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh}F(t,\alpha) = -a\Delta\Delta W + \\
&\qquad + a\Delta\theta + a(\nu-3)\Delta W - (1-\nu+a\nu-a)\theta + 2a(\nu-1)W, \\
&\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\sin\alpha U) + 2W,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где α — сферическая координата, $W(t,\alpha)$, $U(t,\alpha)$ — нормальное и касательное перемещение оболочки; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; γ — объемная плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; $a = \frac{h^2}{12R^2}$ — малый параметр;

$$\Delta Z = \frac{2}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial Z}{\partial\alpha}\right);$$

$$F(t,\alpha) = \begin{cases} P, & 0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi; \\ 0, & \varphi < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{vt}{R}\right).$$

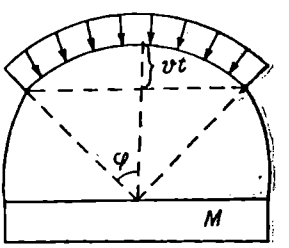


Рис. 1. Оболочка с прикрепленной массой под действием волны нормальной нагрузки

Собственные числа однородной задачи [5] образуют три группы:

а) на участке вблизи $\lambda^2 = 1 - \nu^2$

$$\lambda_n^{I^2} = 1 - \nu^2 + a^{1/3}b^{2/3}\frac{s_n^6 - 1}{s_n^2},$$

где

$$b = (1+\nu)(2+\nu)(1-\nu^2),$$

а s_n — корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\left(\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\, s\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-s^3}{\sqrt{s^3(s^3+2)}}-\frac{1}{\mu_1}\frac{2+\nu}{1+\nu}\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\,\frac{2s^6+1}{s^4(s^3+2)};$$

при $s\to\infty$ $s_n\to\sqrt[6]{\frac{a}{b}}\,2n$ и $\lambda_n^{\mathrm{I}}\to\lambda_n^{\mathrm{II}}$;

вне этого участка

б) $\lambda_n^{\mathrm{II}^2}=1-\nu^2+a(2n)^4$;

в) λ_n^{III} — корень уравнения

$$\frac{p'_{p_1}(0)}{p_{p_1}(0)}=-\frac{1}{\mu_1}\frac{\lambda^2+1-\nu^2}{\lambda^2},$$

где

$$p_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\lambda^4-\lambda^2(12\nu+3)-9(1-\nu^2)}{\lambda^2-1+\nu^2}}$$

и $P_p(x)$ — функция Лежандра первого рода.

При больших n имеет место асимптотическая формула [5]

$$\lambda_n^{\mathrm{III}}\approx 2n+1.$$

Здесь $\mu_1=\frac{M}{2\pi R^2\gamma h}$ — отношение массы прикрепленного тела к массе оболочки.

Каждому λ_n соответствуют собственные функции $w_n(\alpha)$ и $u_n(\alpha)$

I. $w_n^{\mathrm{I}}(\alpha)=P_{-\frac{1}{2}+\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\,s_n}(\cos\alpha)+c_{2n}^{\mathrm{I}}P_{-\frac{1}{2}+i\xi_n}(\cos\alpha)+C_{3n}^{\mathrm{I}}P_{-\frac{1}{2}+i\eta_n}(\cos\alpha)$;

$$c_{2n}^{\mathrm{I}}=e^{-\xi_n\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s_n}\sqrt{s_n^3-2}}\sqrt[4]{}\left(\eta_n\cos\gamma_n+s_n\sqrt{s_n}\,\xi_n\sin\gamma_n\right)\sqrt[6]{\frac{a}{b}};$$

$$c_{3n}^{\mathrm{I}}=e^{-\eta_n\frac{\pi}{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s_n}\sqrt{s_n^3-2}}\sqrt[4]{}\left(\xi_n\cos\gamma_n+s_n\sqrt{s_n}\,\eta_n\sin\gamma_n\right)\sqrt[6]{\frac{a}{b}};$$

$$\xi_n=\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s_n^2-\frac{\sqrt{s_n^6-4}}{s_n}},\quad \eta_n=\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s_n^2+\frac{\sqrt{s_n^6-4}}{s_n}};$$

$$\gamma_n=\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\,\frac{\pi}{2}s_n-\frac{\pi}{4}.$$

При больших $s_n\to\sqrt[6]{\frac{a}{b}}\,2n$ $w_n^{\mathrm{I}}\to w_n^{\mathrm{II}}$, $u_n^{\mathrm{I}}\to u_n^{\mathrm{II}}$.

II. $w_n^{\mathrm{II}}(\alpha)=P_{-\frac{1}{2}+2n}(\cos\alpha)-\sqrt{2}\,(-1)^n e^{-n\pi}P_{-\frac{1}{2}+2ni}(\cos\alpha)$.

III. $w_n^{\mathrm{III}}(\alpha)=P_{p_{1n}}(\cos\alpha)+c_{2n}^{\mathrm{III}}P_{-\frac{1}{2}+\beta_n}(\cos\alpha)+c_{3n}^{\mathrm{III}}P_{-\frac{1}{2}+i\beta_n}(\cos\alpha)$;

$$c_{2n}^{\mathrm{III}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\beta_n}\,\frac{P_{p_{1n}}(0)}{\sin\beta_n\frac{\pi}{2}};$$

$$c_{3n}^{\mathrm{III}}=-\sqrt{\beta_n\pi}\,P_{p_{1n}}(0)\,e^{-\beta_n\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\beta_n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\beta_n\frac{\pi}{2}};$$

$$\beta_n=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt[4]{\lambda_n^2-1+\nu^2},$$

$$A_n=-\frac{\left(\lambda_n^2-1+\nu^2\right)^2+a\lambda_n^6}{\left(1+\nu+\lambda_n^2a\right)\left(\lambda_n^2+1-\nu\right)\left(\lambda_n^2-1+\nu^2\right)}.$$

Решение системы (1) ищем в виде

$$W(t,\ \alpha) = \Sigma T_n(t)\, w_n(\alpha);$$
$$U(t,\ \alpha) = \Sigma T_n(t)\, u_n(\alpha).$$

Воспользуемся свойством ортогональности собственных функций

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u_i u_n + w_i w_n) \sin\alpha\, d\alpha = \begin{cases} I_n & \text{при } i = n \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

Умножим первое уравнение (1) на $u_n \sin\alpha$, второе — на $w_n \sin\alpha$, сложим их и проинтегрируем в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Принимая во внимание граничные условия для собственных функций (2), получим

$$T_n'' + \lambda_n^2 \frac{E}{R^2(1-\nu^2)\gamma} T_n = -\frac{P}{\gamma h I_n} \int_0^{\arccos\left(1-\frac{vt}{R}\right)} w_n(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha,$$

откуда

$$T_n(t) = -\frac{R\sqrt{1-\nu^2}\,P}{\lambda_n^2 \sqrt{E\gamma}\, h I_n} \int_0^t \sin\lambda_n \sqrt{\frac{E}{R^2(1-\nu^2)\gamma}} \times$$
$$\times (t-\tau)\, d\tau \int_0^{\arccos\left(1-\frac{v\tau}{R}\right)} w_n(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha. \tag{3}$$

I_n можно вычислить для любых λ_n, воспользовавшись формулой [6],

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sin p\pi}{\pi(2p+1)} [\beta(p+1) - \beta(-p)].$$

При больших действительных p

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \approx \frac{1}{2p+1}.$$

При больших $|\operatorname{Im} p|$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_p^2(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \approx \frac{\sin p\pi}{\pi p(2p+1)}.$$

Получим

$$I_n^{\mathrm{I}} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}} \frac{1}{2s_n} + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \frac{1}{\pi} \left[\frac{2s_n^{12} + 2s_n^9 - 15s_n^6 + s_n^3 + 10}{(s_n^3-2)\sqrt{s_n}\sqrt{s_n^3+2}} \cos^2\gamma_n + \right.$$
$$\left. + \frac{(2s_n^6 - 4s_n^3 - 7)\, s_n^3}{\sqrt{s_n}\sqrt{s_n^3+2}} \sin^2\gamma_n + \frac{4s_n^9 - 2s_n^6 - 6s_n^3 + 1}{2s_n^2} \sin 2\gamma_n \right] \frac{1}{2s^6+1},$$

$$s_n \to \sqrt[6]{\frac{a}{b}} 2n,\ I_n^{\mathrm{I}} \to I_n^{\mathrm{II}};$$

$$I_n^{\mathrm{II}} = \frac{1}{4n};$$

$$I_n^{\text{III}} = A_n^2 P_{p_{1n}}(0)\, P'_{p_{1n}}(0) + (1 + A_n^2 k_{1n}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} P^2_{p_{1n}}(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{\pi}{8} \frac{P^2_{p_{1n}}(0)}{\sin^2 \beta_n \frac{\pi}{2}} + 0\left(\sqrt[4]{a}\right), \quad \lambda_n^2 > 1 - \nu^2;$$

$$I_n^{\text{III}} = A_n^2 P_{p_{1n}}(0)\, P'_{p_{1n}}(0) + (1 + A_n^2 k_{1n}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} P^2_{p_{1n}}(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha + 0\left(\sqrt[4]{a}\right),$$

$$\lambda_n^2 < 1 - \nu^2;$$

Здесь

$$k_{1n} = p_{1n}(p_{1n} + 1).$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части (5). Так как $w_n = \sum_{k=1}^{3} c_{kn} P_{kn}(\cos\alpha)$, то вопрос сводится к нахождению интеграла

$$J = \int_0^t \sin\lambda \sqrt{\frac{E}{R^2(1-\nu^2)\gamma}}\,(t-\tau) \int_0^{\arccos\left(1-\frac{v\tau}{R}\right)} P_p(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha\, d\tau.$$

Известно [3], что

$$\int_0^{\varphi} P_p(\cos\alpha) \sin\alpha\, d\alpha = \sin\varphi P_p^{-1}(\cos\alpha).$$

Сделаем замену переменной $1 - \frac{v\tau}{R} = x$ и введем обозначения

$$z = 1 - \frac{vt}{R}; \qquad q_1 = \frac{\sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\gamma}}}{v}; \quad q = q_1\lambda,$$

где q_1 — отношение скоростей распространения продольной волны и фронта волны нагрузки.

Тогда получим

$$J = \frac{R}{v} \int_z^1 \sin q(x-z)\, P_p^{-1}(x) \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

или после некоторых преобразований

$$J = \frac{R}{vq}\left\{\frac{1-z^2}{p(p+1)} \frac{dP_p(z)}{dz} - \frac{\sin q(1-z)}{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q}\left[\cos qz \int_z^1 \sin qx P'_p(x)\, dx - \sin qz \int_z^1 \cos qx P'_p(x)\, dx\right]\right\}.$$

Обозначим

$$B(q, z) = \int_z^1 \cos qx P'_p(x)\, dx;$$

$$C(q, z) = \int_z^1 \sin qx P'_p(x)\, dx.$$

Функция $v = p'_p(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)v'' - 4xv' + [p(p+1) - 2]v = 0.$$

Умножив это уравнение на $\cos qx$ и проинтегрировав в пределах от z до 1, получим уравнение для $B(q, z)$

$$q^2 \frac{\partial^2 B}{\partial q^2} + [q^2 - p(p+1)]B = f(z, q),$$

(где

$$f(z, q) = p(p+1)Pp(z)\cos qz - (1-z^2)P'_p(z)\,q\sin qz - 2P'_p(1)\cos q.$$

Общим решением уравнения (6) является

$$B(q, z) = c_1\sqrt{q}\,H^{(1)}_{\frac{1}{2}+p}(q) + c_2\sqrt{q}\,H^{(2)}_{\frac{1}{2}+p}(q) +$$

$$+ \frac{\pi i}{4}\sqrt{q}\left[H^{(1)}_{\frac{1}{2}+p}(q)\int_q^{q_0}\frac{f(z, x)}{x\sqrt{x}}H^{(2)}_{\frac{1}{2}+p}(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - H^{(2)}_{\frac{1}{2}+p}(q)\int_q^{q_0}\frac{f(z, x)}{x\sqrt{x}}H^{(1)}_{\frac{1}{2}+p}(x)\,dx\right],$$

где $H^k_{\frac{1}{2}+p}(x)$ — функция Бесселя.

Условия для определения c_1 и c_2

$$B(q_0, z) = \int_z^1 \cos q_0 x P'_p(x)\,dx = O\left(\frac{1}{q_0}\right);$$

$$\frac{\partial B}{\partial p}(q_0, z) = -\int_z^1 x\sin q_0 x P'_p(x)\,dx = O\left(\frac{1}{q_0}\right).$$

Устремив $q_0 \to \infty$, найдем, что $c_1 = c_2 = 0$. Проведя аналогичные рассуждения с $C(q, z)$, получим

$$J = \frac{R}{vq}\left\{\frac{1-z^2}{p(p+1)}\frac{dp_p(z)}{dz} - \frac{\sin q(1-z)}{q} + \right.$$

$$+ \frac{\pi i}{4\sqrt{q}}\left[H^{(1)}_{\frac{1}{2}+p}(q)\int_q^{\infty}F(z, x, q)\frac{H^{(2)}_{\frac{1}{2}+p}(x)}{x\sqrt{x}}dx - \right.$$

$$\left.\left. - H^{(2)}_{\frac{1}{2}+p}(q)\int_q^{\infty}F(z, x, q)\frac{H^{(0)}_{\frac{1}{2}+p}(x)}{x\sqrt{x}}dx\right]\right\};$$

$$F(z, x, q) = p(p+1)P_p(z)\sin z(x-q) - p(p+1)\sin(x-qz) +$$

$$+ x(1-z^2)P'_p(z)\cos z(x-q).$$

Рассмотрим интегралы

$$I_k^+ = e^{-izq}\int_q^{\infty}e^{izq}\frac{H^{(k)}_{\mu}(x)}{x^{m+\frac{1}{2}}}dx;$$

$$I_k^- = e^{izq}\int_q^{\infty}e^{-izq}\frac{H^{(k)}_{\mu}(x)}{x^{m+\frac{1}{2}}}dx.$$

Для функций Бесселя справедливо асимптотическое представление

$$H_\mu^{(1)}(\mu x) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt[4]{x^2-1}} e^{i\mu\left(\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}\right)}[1+z_1(\mu, x)];$$
$$H_\mu^{(2)}(\mu, x) = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi\mu}\sqrt[4]{x^2-1}} e^{-i\mu\left(\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}\right)}[1+z_2(\mu, x)], \quad (4)$$

где μ — действительное, $x > 1$, $z_k(\mu, x) = O\left(\frac{1}{\mu x}\right)$ [8]

Тогда

$$I_1^- \approx \frac{\sqrt{2}\, e^{iqz} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}\,\mu^m} \int\limits_{\frac{q}{\mu}}^{\infty} \frac{e^{i\mu\left(\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}-zx\right)}}{x^{m+\frac{1}{2}}} dx.$$

Для вычисления этого интеграла применим метод перевала [4]. Рассмотрим функцию

$$h(x) = i\left(\sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} - zx\right).$$

Точка перевала

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

является корнем уравнения $h'(x) = 0$. Этот корень может находиться внутри промежутка интегрирования, если $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} > \frac{q}{\mu}$, т. е. $z >$

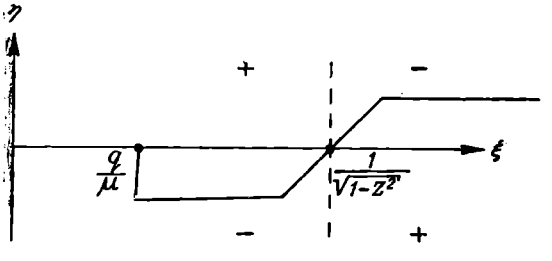


Рис. 2. Контур интегрирования для вычисления интеграла I_1^-

$> \sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}$. Линиями наискорейшего спуска являются прямые, наклоненные под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси x. Положим $x = \xi + i\eta$. Тогда при малых η

$$\operatorname{Re} h(x) < 0 \quad \begin{array}{l} \text{при} \quad \eta < 0, \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \\ \text{при} \quad \eta > 0, \quad \xi > \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \end{array}$$

Выберем контур интегрирования (рис. 2). Вклад конца $x = \frac{q}{\mu}$

$$V_1^- = -H_\mu^{(1)}(q)\frac{i}{q^{m+1}}\frac{1}{z-\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}.$$

Вклад точки перевала $x=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$$W_1^- = 2\frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\mu^{m+\frac{1}{2}}} e^{-i\mu \arccos\sqrt{1-z^2}+iqz}, \quad z \neq 1.$$

Таким образом,

$$I_1^- \approx -H_\mu^{(1)}(q)\frac{i}{q^{m+\frac{1}{2}}\left(z-\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}\right)} \quad \text{при } z<\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}, \tag{5}$$

$$I_1^- \approx -H_\mu^{(1)}(q)\frac{i}{q^{m+\frac{1}{2}}\left(z-\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}\right)} + 2\frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\mu^{m+\frac{1}{2}}} e^{-i\mu \arccos\sqrt{1-z^2}+iqz}$$

$$\text{при } z>\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}.$$

Обе эти формулы неверны, если z близко к $\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}$. Положим $z=\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}+\varepsilon$, точка перевала при этом лежит вблизи конца $x=\frac{q}{\mu}$. Положим $x=\frac{q}{\mu}+u$ и разложим подынтегральные функции в ряд Тейлора

$$I_1^- = B\int_0^\infty e^{i\mu\left(-\varepsilon u+\frac{Au^2}{2}+\ldots\right)}(1+a_1u+\ldots)\,du \approx B\int_0^{u_0} e^{i\mu\left(-\varepsilon u+\frac{Au^2}{2}\right)}du;$$

$$A=\frac{\mu^3}{q^3\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}};$$

$$B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mu}{q^{m+1}\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}} e^{iq\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}-i\mu\arccos\frac{\mu}{q}-i\frac{\pi}{4}}.$$

Здесь u_0 выбирается так, что $|u_0| \ll 1$ и

$$Im\left(-\varepsilon u_0+\frac{Au_0^2}{2}\right)>0.$$

Положим

$$-\varepsilon u+\frac{Au^2}{2}=iw.$$

Тогда

$$u=\frac{\varepsilon}{A}-\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{A^2}+i\frac{2w}{A}}$$

и

$$I_1^- \approx -B\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2A}}\int_0^{w_0}\frac{e^{-\mu w}\,dw}{\sqrt{w+\frac{\varepsilon^2}{2A}e^{-i\frac{\pi}{2}}}} \approx$$

$$\approx -B\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2A}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu w}\,dw}{\sqrt{w+\frac{\varepsilon^2}{2A}e^{-i\frac{\pi}{2}}}} =$$

$$= -\frac{B}{\sqrt{2A}}\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{-i\mu\frac{\varepsilon^2}{2A}}\left[1-\Phi\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{|\varepsilon|\sqrt{\mu}}{\sqrt{2A}}\right)\right]. \tag{6}$$

Здесь $\Phi(x)$ — интеграл вероятности. Заметим, что при больших $\frac{|\varepsilon|\sqrt{\mu}}{\sqrt{2A}}$ и $\varepsilon<0$, когда можно применить асимптотическую формулу $\Phi(\sqrt{x}) \approx 1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$, (6) переходит в (5). Аналогичными будут рассуждения для I_2^+. Для интегралов I_1^+ и I_2^- точки перевала не попадают внутрь промежутка интегрирования.

Используя соотношения

$$\int \frac{Z_\nu(x)\,Y_\mu(x)}{x}\,dx=\frac{x}{\nu^2-\mu^2}\left[Y_\mu(x)\frac{dZ_\nu(x)}{dx}-Z_\nu(x)\frac{dY_\mu(x)}{dx}\right]$$

($Z_\nu(x)$, $Y_\mu(x)$ функции Бесселя)

и

$$\sin x=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\frac{1}{2}}(x),\quad \cos x\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{-\frac{1}{2}}(x)\ [1],$$

нетрудно получить формулу

$$H_\mu^{(1)}(q)\int_q^\infty \frac{\sin(x-qz)}{x\sqrt{x}}H_\mu^{(2)}(x)\,dx-H_\mu^{(2)}(q)\int_q^\infty \frac{\sin(x-qz)}{x\sqrt{x}}\times$$

$$\times H_\mu^{(1)}(x)\,dx=\frac{4i}{\pi q}\,\frac{\sin q(1-z)}{\mu^2-\frac{1}{4}}-\frac{4i\sin\Psi_1}{\pi\sqrt{q}\left(\mu^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}},$$

где

$$\psi_1=q\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}-qz-\mu\arccos\frac{\mu}{q}+\frac{\pi}{2}\mu.$$

Окончательно будем иметь

$$J=\frac{R}{vq}\left\{\frac{(1-z^2)P_p^1(z)}{p(p+1)}\left[1-\frac{p(p+1)}{q^2\left(z^2-1+\frac{\mu^2}{q^2}\right)}\right]-\frac{\sin\psi_1}{q\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}\right\}$$

при $z<\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}$,

$$J=\frac{R}{vq}\left\{\frac{(1-z^2)P_p'(z)}{p(p+1)}\left[1-\frac{p(p+1)}{q^2\left(z^2-1+\frac{\mu^2}{q^2}\right)}\right]-\frac{\sin\Psi_1}{q\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-z^2}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}\sqrt{p}\,q}\left[-\sqrt{1-z^2}\,P_p'(z)\sin\psi+pP_p(z)\cos\psi\right]\right\};$$

$$\psi=\mu\arcsin z-qz+q\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}-\mu\arccos\frac{\mu}{q}-\frac{\pi}{4}$$

при $z>\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}$;

$$J=\frac{R}{vq}\left\{\frac{(1-z^2)P_p'(z)}{p(p+1)}\times\right.$$

$$\times\left[1+\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}\,p\,Im\psi}{|\varepsilon|\,2\sqrt{2}\sqrt{q}\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}+\frac{p(p+1)}{2q^2\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}\left(z+\sqrt{1+\frac{p^2}{q^2}}\right)}}\right]-$$

$$\left.-\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\,\frac{pP_p(z)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\,\Psi}{q\sqrt{q}\,2\sqrt{2}\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}-\frac{\sin\Psi_1}{q\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{q^2}}}\right\}$$

при $z=\sqrt{1-\frac{\mu^2}{q^2}}+\varepsilon$;

$$\Psi=e^{i\left(\frac{\varepsilon^2}{2A}\mu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1-\Phi\left(\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{\varepsilon^2\mu}{2A}}\right)\right],\quad \mu=\frac{1}{2}+p.$$

Для функций Бесселя чисто мнимого порядка легко получить формулы, аналогичные (4).

Тогда при $p=-\frac{1}{2}+i\gamma$

$$J=\frac{R}{vq}\left\{\frac{(1-z^2)\,P'_p(z)}{p(p+1)}\left[1-\frac{p(p+1)}{q^2\left(z^2-1+\frac{\gamma^2}{q^2}\right)}\right]-\frac{\sin\Psi_2}{q\sqrt[4]{1+\frac{\gamma^2}{q^2}}}\right\},$$

$$\Psi_2=q\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{q^2}}-qz-\gamma\ln\frac{q}{\gamma+q\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{q^2}}}.$$

Используя полученные формулы для J, а также выражения для I_n, можно найти все характеристики колебания оболочки, например, перемещения оболочки $U(t,\alpha)$ и $W(t,\alpha)$. При вычислении $W(t,\alpha)$ следует суммировать ряды

$$\Sigma T_n^{II}(t)\,w_n^{II}(\alpha)\ \text{и}\ \Sigma T_n^{III}(t)\,w_n^{III}(\alpha).$$

Первый ряд сходится медленно, как $\sum\frac{1}{n\lambda_n^{II\,3}}P'_{-\frac{1}{2}+2n}(z)\,P_{-\frac{1}{2}+2n}(\cos\alpha)$, так как медленно увеличивается λ_n^{II}. Применив асимптотическое представление функции Лежандра большого порядка, можно использовать один из существующих способов улучшения сходимости ряда [7].

Второй ряд сходится достаточно быстро, как $\sum\frac{1}{n^5\sqrt[4]{n}}$. Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что $\frac{q}{\mu}=\frac{q_1\lambda_n}{p_n+\frac{1}{2}}>1$. Последнее неравенство справедливо для больших λ_n. Для выполнения этого неравенства при всех λ_n следует потребовать, чтобы

$$q_1>\frac{1}{\sqrt[4]{1-\nu^2}\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{a}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, 1949.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
4. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. ИЛ, 1961.
5. Казаринова Н. Н. Об осесимметричных колебаниях сферической оболочки и жестко скрепленного с ней тела. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3, 1968.
6. Казаринова Н. Н. Вычисление интеграла от квадрата функции Лагранжа. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3, 1968.
7. Салехов Г. С. Вычисление рядов. Гостехиздат, 1955.
8. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Физматгиз, 1962.