Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

ДИНАМИКА ИНЕРЦИОННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ДРОБИЛКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

Ю. И. Северов

В теории инерционных конических дробилок дробящий конус и чаша считаются круглыми. Однако при изготовлении узлов дробилки имеются погрешности, а при ее работе неравномерно изнашиваются футеровки конуса и чаши. В результате конус и чаша дробилки перестают быть геометрически строго круглыми. Встает вопрос о влиянии такого нарушения форм узлов дробилки на режим ее работы.

Динамика инерционной дробилки с круглыми основаниями конуса и чаши уже достаточно сложна [1]. Если учесть эллиптичность сразу обоих оснований, то трудности резко возрастут.

Будем считать поперечное сечение чаши дробилки в зоне соприкосновения или ближайшего взаимного расположения с конусом эллиптическим (полуоси a и b), такое же сечение дробящего конуса — круглым (радиус «R») и перейдем к пределу, устремляя к нулю угол между осями чаши и конуса при сохранении расстояний между точкой касания конуса и чаши и осью дробилки. Дробилка при этом из конической превращается в цилиндрическую. При рабочем ходе дробилки в предельном случае система тел будет совершать плоское горизонтальное движение. Динамическая задача из пространственной превращается в плоскую, так как вместо пространственной системы сил, приложенных к дробилке, можно рассматривать плоскую (силы тяжестей тел системы уравновешиваются вертикальными составляющими реакций, а горизонтальные составляющие реакций для каждого тела суммируются). Ось собственных вращений тел становится параллельной оси прецессии (оси дробилки).

Геометрическим условием возможности обкатки кругового дробящего цилиндра по внутренней поверхности эллиптической цилиндрической чаши является неравенство

$$R \leqslant \frac{b^2}{a},$$

где $\frac{b^2}{a}$ — наименьший радиус кривизны поперечного сечения чаши.

[1] А. К. Рундквист. Механика инерционной дробилки Механобра. В сб. «Механика и расчет машин вибрационного типа». АН СССР, 1957.

Ю. И. Северов. К вопросу об устойчивости установившегося движения инерционной конусной дробилки. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3, 1968.

Как для дробилки с круглым основанием [1], составим для дробилки с эллиптическим основанием в предельном случае уравнения плоского движения дробящего цилиндра (тела *I*) и дебалансного тела (тела *II*).

Уравнения движения тела I. Проектируя дробящий цилиндр и чашу на плоскость, перпендикулярную к оси дробилки, получим картину, часть которой схематически изображена на рис. 1, где O и O_1 — точки пересечения оси дробилки и оси собственного вращения тел *I* и *II* с указанной плоскостью.

Уравнения движения тела *I* имеют вид:

$$\begin{cases} m_1[-(2\dot{O}O_1\dot{\psi} + OO_1\cdot\ddot{\psi})\sin\psi + (\ddot{O}O_1 - OO_1\cdot\dot{\psi}^2)\cos\psi] = \\ \qquad = R_{2\xi} + R_{3\tau}\sin\delta_n - R_{3n}\cos\delta_n, \\ m_1[(\ddot{O}O_1 - OO_1\cdot\dot{\psi}^2)\sin\psi + (2\dot{O}O_1\cdot\dot{\psi} + OO_1\cdot\ddot{\psi})\cos\psi] = \\ \qquad = R_{2\eta} - R_{3\tau}\cos\delta_n - R_{3n}\sin\delta_n, \\ -I_{10_1}\ R^{-1}\cdot[\dot{\psi}\ddot{\psi}(OO_1)^2 + \dot{\psi}^2(OO_1)(O\dot{O}_1) + (O\dot{O}_1)(O\ddot{O}_1)]\times \\ \qquad \times[\dot{\psi}^2(OO_1)^2 + (O\dot{O}_1)^2]^{-\frac{1}{2}} = M_c - R_{3\tau}\cdot R, \end{cases} \tag{1}$$

где m_1 — масса тела *I*; ψ — угол прецессии дробилки; J_{10_1} — момент инерции тела *I* относительно оси O_1 собственного вращения этого тела;

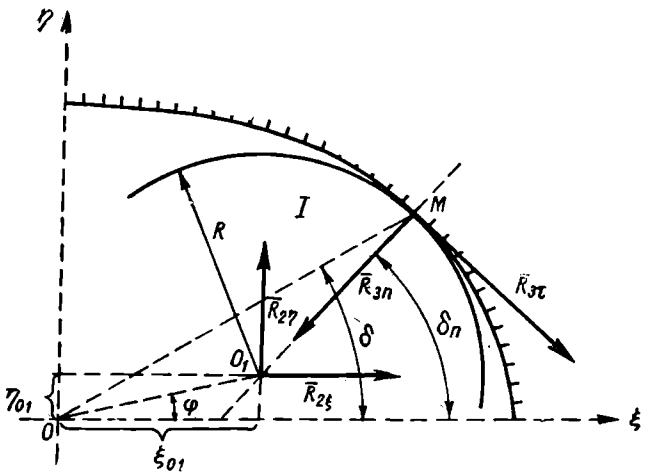


Рис. 1. Проекция дробящего цилиндра и чаши на плоскость, перпендикулярную к оси дробилки:
O и O_1 — точки пересечения оси дробилки и оси собственного вращения тел *I* и *II* с плоскостью

$R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$ — проекции на оси ξ и η главного вектора горизонтальных реакций второго тела на первое; $R_{3\tau}$, R_{3n} — касательная и нормальная составляющие реакции дробимого материала (или, в случае холостого хода, — соответствующие реакции неподвижной чаши дробилки); M_c — момент полезного сопротивления дробимого материала;

$$M_c = f_k\cdot R_{3n}; \tag{2}$$

f_k — экспериментальный коэффициент (при холостом ходе — коэффициент трения качения тела *I*).

[1] Ю. И. Северов. К вопросу об устойчивости установившегося движения инерционной конусной дробилки. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3, 1968.

Уравнения движения тела II. Уравнения движения второго тела можно представить в виде:

$$m_2\{\dot{O}\dot{O}_1\cos\psi - 2O\dot{O}_1\sin\psi\cdot\dot{\psi} - [OO_1\cos\psi + \mu\cos(\psi+\beta)]\ \dot{\psi}^2 -$$
$$-[OO_1\sin\psi + \mu\sin(\psi+\beta)]\cdot\ddot{\psi} - 2\mu\cos(\psi+\beta)\ \dot{\psi}\dot{\beta} -$$
$$-\mu\cos(\psi+\beta)\cdot\dot{\beta}^2 - \mu\sin(\psi+\beta)\cdot\ddot{\beta}\} = -R_{2\xi},$$
$$m_2\{\dot{O}\dot{O}_1\sin\psi + 2O\dot{O}_1\cos\psi\cdot\dot{\psi} - [OO_1\sin\psi + \mu\sin(\psi+\beta)]\ \dot{\psi}^2 + \quad (3)$$
$$+[OO_1\cdot\cos\psi + \mu\cos(\psi+\beta)]\ \ddot{\psi} - 2\mu\sin(\psi+\beta)\ \dot{\psi}\dot{\beta} -$$
$$-\mu\sin(\psi+\beta)\cdot\dot{\beta}^2 + \mu\cos(\psi+\beta)\ \ddot{\beta}\} = -R_{2\eta},$$
$$(J_{20_1} - m_2\mu^2)(\ddot{\psi}+\ddot{\beta}) = M - \mu R_{2\xi}\sin(\psi+\beta) + \mu R_{2\eta}\cos(\psi+\beta),$$

где m_2 — масса тела II; $\mu = O_1O_2$; J_{20_1} — момент инерции тела II относительно оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости $\xi\eta$.

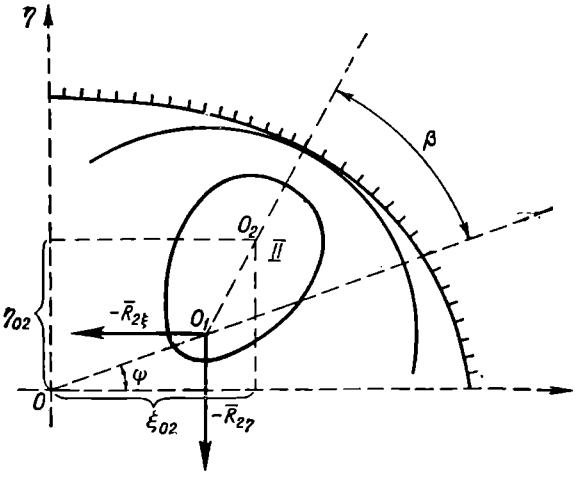


Рис. 2. Проекции дробящего цилиндра, дебалансного тела II и чаши на плоскость, перпендикулярную оси дробилки:

O_2 — точка пересечения оси, проходящей через центр тяжести тела II и параллельной оси дробилки с плоскостью

В уравнениях (1) и (3) переменные OO_1 и ψ являются зависимыми, однако удобнее выразить их не друг через друга, а обе, используя рис. 2, — через переменную δ при помощи соотношений

$$OO_1^2 = a^2b^2\frac{1+\operatorname{tg}^2\delta}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\delta} + R^2 - 2abR\left(\frac{a^2\operatorname{tg}^2\delta+b^2}{a^4\operatorname{tg}^2\delta+b^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\psi = \operatorname{arctg}\left[\frac{a}{b}\operatorname{tg}\delta\cdot\frac{b\sqrt{a^4\operatorname{tg}^2\delta+b^4}+Ra\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\delta+b^2}}{a\sqrt{a^4\operatorname{tg}^2\delta+b^4}+Rb\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\delta+b^2}}\right].$$

После подстановки этих выражений в (1) и (3) получаем уравнения, которые практически пока решить невозможно. Поэтому применим метод малого параметра. В качестве последнего примем

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} \qquad (4)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнения движения дробилки с эллиптическим основанием переходят в соответствующие уравнения движения дробилки с круглым основанием.

С точностью до малых высшего порядка

$$OO_1 = a - R - a\sin^2\delta \cdot \varepsilon,$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left[\left(1 + \frac{2R}{a+R}\ \varepsilon\right) \cdot \operatorname{tg}\delta\right],$$

$$\dot{O}O_1 = -a\sin 2\delta \cdot \dot{\delta} \cdot \varepsilon,$$

$$\dot{\psi} = \left(1 + \frac{2R}{R+R}\cos 2\delta\ \ \varepsilon\right) \cdot \dot{\delta},$$

$$\ddot{O}O_1 = -a\,(2\cos 2\delta\ \ \dot{\delta}^2 + \sin 2\delta \cdot \ddot{\delta}) \cdot \varepsilon, \tag{5}$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{4R}{a+R}\sin 2\delta \cdot \dot{\delta}^2 \cdot \varepsilon + \left(1 + \frac{2R}{a+R}\cos 2\delta \cdot \varepsilon\right) \cdot \ddot{\delta}.$$

Как видно из рис. 1,

$$\delta_n = \delta + \angle OMO_1.$$

С указанной выше точностью

$$\delta_n = \delta. \tag{6}$$

На основании (5) и (6) из (1) и (3) получаем уравнения движения тел системы в нулевом и первом приближениях. Уравнения в нулевом приближении, как уже отмечалось, совпадают после несложных тождественных преобразований с соответствующими уравнениями движения тел дробилки с круглым основанием.

Уравнения движения тела I в первом приближении

$$m_1\left[(a-R)\sin\delta + \varepsilon\,(a+R)^{-1} \cdot (a^2 + 3aR - 2R^2)\sin\delta \cdot (2 - 3\sin^2\delta)\right] \cdot \ddot{\delta} +$$
$$+ m_1\left\{(a-R)\cos\delta + \varepsilon\,(a+R)^{-1} \cdot [2a\,(a+R) -\right.$$
$$\left. -(9a^2 + 23aR - 14R^2) \cdot \sin\delta] \cdot \cos\delta\right\}\ \dot{\delta}^2 =$$
$$= -R_{2\xi} - R_{3\tau}\sin\delta + R_{3n}\cos\delta,$$

$$m_1\left\{(a-R)\cos\delta - \varepsilon\,(a+R)^{-1}\ \ [2R\,(a-R) +\right.$$
$$\left. + (3a^2 + 5aR - 2R^2) \cdot \sin^2\delta] \cdot \cos\delta\right\} \cdot \ddot{\delta} -$$
$$- m_1\left\{(a-R)\sin\delta + \varepsilon\,(a+R)^{-1}\ \ [2\,(3a^2 + 10aR - 7R^2) -\right.$$
$$\left. - 9\,(a^2 + 3aR - 2R^2)\sin^2\delta]\ \ \sin\delta\right\} \cdot \dot{\delta}^2 =$$
$$= R_{2\eta} - R_{3\tau}\cos\delta - R_{3n}\sin\delta,$$

$$-\frac{1}{R}J_{10_1}\ \left\{a - R + \varepsilon\,(a+R)^{-1}[2R\,(a-R) - (a^2 + 5aR - 4R^2)\sin^2\delta]\right\}\ddot{\delta} +$$
$$+ \frac{1}{R}J_{10_1}\ \ \varepsilon\ \ (a+R)^{-1} \cdot (a^2 + 5aR - 4R^2)\ \ \sin 2\delta \cdot \dot{\delta}^2 = M_c - R_{3\tau}\ \ R.$$

Уравнения движения тела II в первом приближении еще более громоздки, и мы их не приводим.

Из уравнений движения тел I и II в первом приближении исключаем, используя (2), реакции $R_{2\xi}$, $R_{2\eta}$, $R_{3\tau}$, R_{3n}. В результате получаем в первом приближении два общие дифференциальные уравнения движения системы, которые не выписываем из-за их громоздкости.

После интегрирования этих уравнений из уравнений движения тел I и II находятся все реакции, которые могут понадобиться при прочностном расчете узлов дробилки.

Уравнения движения системы тел в первом приближении не допускают частного решения вида

$$\dot{\delta} = \text{const}, \quad \beta = \text{const}.$$

Однако, как показано в (3), при

$$\varepsilon = 0$$

существует решение

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}^{(0)} = \text{const}, \quad \beta = \beta^{(0)} = \text{const}.$$

Поэтому, считая решение уравнений движения системы разложенным в ряды:

$$\delta = \delta^{(0)} + \delta^{(1)} \cdot \varepsilon + \delta^{(2)} \quad \varepsilon^2 +$$
$$\beta = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} \cdot \varepsilon + \beta^{(2)} \cdot \varepsilon^2 +$$

где $\delta^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — некоторые функции времени, удовлетворяем этим уравнениям значениями

$$\begin{aligned} \delta &= \delta^{(0)} + \delta^{(1)} \cdot \varepsilon, \\ \beta &= \beta^{(0)} + \beta^{(1)} \cdot \varepsilon, \end{aligned} \tag{7}$$

заменяя предварительно в первом приближении

$$M = N\left\{\left[1 + \varepsilon \cdot 2R(a+R)^{-1} \cdot \cos 2\delta\right] \cdot \dot{\delta} + \dot{\beta}\right\}^{-1} \tag{8}$$

Исходя из частного решения

$$\dot{\psi} = \dot{\delta} = \dot{\delta}^{(0)} = \text{const}, \quad \beta = \beta^{(0)} = \text{const}, \tag{9}$$

которое представляет частное решение уравнений нулевого приближения, будем искать соответствующее решение уравнений для функций $\delta^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$.

Для указанных функций из уравнений движения системы в первом приближении и на основании (7)—(9) получим уравнения:

$$\left\{\begin{aligned} &a_{11}\ddot{\delta}^{(1)} + a_{12}\dot{\delta}^{(1)} + b_{11}\ddot{\beta}^{(1)} + b_{12}\dot{\beta}^{(1)} + b_{13} \cdot \beta^{(1)} = \\ &\qquad = c_{10} + c_{13}\sin 2\delta^{(0)} + c_{14}\cos 2\delta^{(0)} + c_{16}\cos 4\delta^{(0)}, \\ &a_{21}\ddot{\delta}^{(1)} + a_{22}\dot{\delta}^{(1)} + b_{21}\ddot{\beta}^{(1)} + b_{22}\dot{\beta}^{(1)} + b_{23}\beta^{(1)} = \\ &\qquad = c_{20} + c_{21}\sin\delta^{(0)} + c_{22}\cos\delta^{(0)} + c_{23}\sin 2\delta^{(0)} + \\ &\qquad\quad + c_{24}\cos 2\delta^{(0)} + c_{25}\sin 4\delta^{(0)} + c_{26}\cos 4\delta^{(0)}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{lq} — постоянные величины, зависящие от параметров системы тел, а также от $\beta^{(0)}$ и $\dot{\delta}^{(0)}$. Так, например,

$$a_{22} = 2R\left\{m_1 f_k (a - R) + m_2\left[f_k (a - R) + \mu\left(f_k \cos\beta^{(0)} - R\sin\beta^{(0)}\right)\right]\right\} \cdot \dot{\delta}^{(0)}.$$

Частное решение уравнений (10) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= d_{10} \cdot t + d_{11}\sin\delta^{(0)} + d_{12}\cos\delta^{(0)} + d_{13}\sin 2\delta^{(0)} + \\ &\quad + d_{14}\cos 2\delta^{(0)} + d_{15}\sin 4\delta^{(0)} + d_{16}\cos 4\delta^{(0)}, \\ \beta^{(1)} &= d_{20} + d_{21}\sin\delta^{(0)} + d_{22}\cos\delta^{(0)} + d_{23}\sin 2\delta^{(0)} + \\ &\quad + d_{24}\cos 2\delta^{(0)} + d_{25}\sin 4\delta^{(0)} + d_{26}\cos 4\delta^{(0)}, \end{aligned} \tag{11}$$

где d_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 0, 1, 2, \ldots, 6)$ — искомые постоянные коэффициенты. Они выражаются через постоянные параметры системы тел, а также через $\beta^{(0)}$ и $\dot{\delta}^{(0)}$. Выражения d_{ij} не выписываем из-за их громоздкости.

Найденные значения d_{ij} определяют частное решение (11) и решение (7).

Нас интересуют, в первую очередь, угловая скорость $\dot{\psi}$ прецессии (качаний) движущихся частей дробилки, угол β отклонения дебаланса и дробящая сила D, развиваемая подвижным конусом.

Из формул (5), (7), (11) и значений d_{ij} следует, что у эллиптической цилиндрической дробилки существует такое движение, при котором в первом приближении угловая прецессии и угол отклонения дебаланса ограничены. При этом угловая скорость прецессии и угол отклонения дебаланса периодичны и имеют одинаковый период, который не зависит от ε:

$$\tau_\psi = \tau_\beta = \frac{2\pi}{\dot{\delta}^{(0)}}. \tag{12}$$

В частности, для $\dot{\psi}$ это вытекает из приближенной формулы:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} = [1 + 2R(a+R)^{-1} \cdot \cos 2\delta \cdot \varepsilon] \cdot \dot{\delta} = \\ = \dot{\delta}^{(0)} \{1 + [2R(a+R)^{-1} \cos 2(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) + \\ + d_{10} + d_{11} \cos(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) - d_{12} \sin(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) + \\ + 2d_{13} \cos 2(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) - 2d_{14} \sin 2(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) + \\ + 4d_{15} \cos 4(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)}) - 4d_{16} \sin 4(\dot{\delta}^{(0)} \cdot t + \delta_0^{(0)})] \cdot \varepsilon\}\end{aligned}$$

Дробящая сила D подвижного конуса равна по модулю нормальной реакции R_{3n} неподвижной чаши дробилки.

В первом приближении

$$\begin{aligned}D = [(m_1 + m_2)(a - R) + m_2 \mu \cos \beta^{(0)}] \ \dot{\delta}^{(0)2} + \\ + \varepsilon \cdot \{2[a \cos \delta^{(0)} \ \dot{\delta}^{(0)} + (a - R) \ \dot{\delta}^{(1)}] + \\ + (a+R)^{-1} \cdot [2(3a^2 + 10aR - 7R^2) - \\ - (9a^2 + 23aR - 14R^2) \cdot \sin \delta^{(0)} - 4R(a-R) \sin^3 \delta^{(0)}] \sin \delta^{(0)} \cdot \dot{\delta}^{(0)}\} \times \\ \times \dot{\delta}^{(0)} \ m_1 + \varepsilon \cdot \{2[a\dot{\delta}^{(0)} + (a-R)\dot{\delta}^{(1)}] - \\ - [5a + 4(a+R)^{-1} R(a-R) \sin^2 \delta^{(0)}] \sin^2 \delta^{(0)} \cdot \dot{\delta}^{(0)}\} \dot{\delta}^{(0)} \ m_2 + \\ + \varepsilon\mu \sin \beta^{(0)} \cdot (\ddot{\delta}^{(1)} + \ddot{\beta}^{(1)} - \beta^{(1)} \cdot \dot{\delta}^{(0)2}) \cdot m_2 + \\ + 2\varepsilon\mu \cos \beta^{(0)} \cdot (\dot{\delta}^{(1)} + \dot{\beta}^{(1)}) \cdot \dot{\delta}^{(0)} \ m_2 + 2\varepsilon\mu R(a+R)^{-1} \times \\ \times \{2 \cos(2\delta^{(0)} + \beta^{(0)}) - \cos \delta^{(0)} \cdot [\cos(\delta^{(0)} - \beta^{(0)}) + \\ + \cos \delta^{(0)} \ \cos(2\delta^{(0)} - \beta^{(0)})]\} \cdot \dot{\delta}^{(0)2} \ m_2\end{aligned} \tag{13}$$

Вычисление дробящей силы без помощи ЭВМ весьма затруднительно, а если учесть, что желательно знать дробящую силу при различных значениях параметров системы, то и совсем практически нецелесообразно. Поэтому подобные вычисления были произведены на ЭВМ «Одра-1204».

Величины дробящей силы в первом приближении были вычислены при следующем варьировании параметров дробилки

$$\begin{aligned}m_1 &= 10\,780;\ 12\,000;\ 13\,000\ (кг),\\ m_2 &= 1150;\ 1314;\ 1450\ (кг),\\ J_{10_t} &= 3400;\ 4070;\ 4410\ (кг.\ м^2),\\ J_{20_t} &= 340;\ 390;\ 490\ (кг.\ м^2),\\ \mu &= 0{,}09;\ 0{,}15;\ 0{,}20\ (м),\\ f_k &= 0{,}15;\ 0{,}20;\ 0{,}22\ (м),\\ \delta^{(0)} &= 42;\ 57;\ 63\ (рад/с),\\ \varepsilon &= 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001.\end{aligned}$$

Величина дробящей силы, как видно из формулы (13), периодически меняется с течением времени.

Эта величина, например, при

$$m_1 = 10\,780 \ кг, \ m_2 = 1314 \ кг, \ J_{10_1} = 4070 \ кг \ м^2,$$
$$J_{20_1} = 390 \ кг \ м^2, \ \delta^{(0)} = 57 \ рад/с, \ \varepsilon = 0{,}001$$

и вариировании

$$f_k = 0{,}15; \ 0{,}20; \ 0{,}22; \ (м),$$
$$\mu = 0{,}09; \ 0{,}15; \ (м)$$

колеблется в пределах порядка

$$400 - 600 \ (кН).$$

Выводы. 1. Эллиптическая цилиндрическая дробилка не имеет установившегося движения с постоянной угловой скоростью прецессии (качаний) $\dot{\psi}$ и постоянным углом отклонения β дебаланса.

2. В первом приближении у дробилки существует движение с ограниченными угловой скоростью прецессии и углом отклонения дебаланса.

3. В этом же приближении угловая скорость прецессии и угол отклонения дебаланса периодичны и имеют одинаковый период (12), который зависит от постоянной угловой скорости прецессии в нулевом приближении и не зависит от ε.

4. В первом приближении дробящая сила подвижного конуса выражается формулой (13).

5. В первом приближении величина дробящей силы подвижного конуса периодична и, например, при некоторых конкретных значениях параметров дробилки, приведенных в тексте, колеблется в пределах порядка 400—600 ($кН$).