

К ВОПРОСУ О НАХОЖДЕНИИ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

П. А. Журавлев, Г. А. Колтон

Рассмотрим упругие поперечные (изгибные) свободные колебания пластины, имеющей форму кругового кольца, зашеченного по внутреннему контуру радиуса b , со свободным наружным контуром радиуса c .

При условии, что постоянная толщина h пластины мала по сравнению с радиусом ее наружного контура, а прогибы w малы по сравнению с ее толщиной, уравнение малых колебаний [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \nabla^4 w = 0; \quad a^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона;
 ρ — плотность материала пластины.

Для симметричных относительно центра пластины так называемых зонтичных колебаний

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r},$$

где r — расстояния точек пластины до ее центра.

Граничные условия:

на свободном наружном контуре ($r = c$) — динамические условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{c} \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0;$$

на зашеченном внутреннем контуре ($r = b$) — геометрические условия

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) методом Фурье

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(p_n t + B_n) [A_1^{(n)} J_0(z) + A_2^{(n)} N_0(z) + A_3^{(n)} I_0(z) + A_4^{(n)} K_0(z)], \quad (4)$$

где $z = r \sqrt{\frac{p_n}{a}}$; p_n ($n = 1, 2, \dots$) — частоты свободных колебаний пластины.

Частоты p_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} J_0(\beta_n) N_0(\beta_n) I_0(\beta_n) K_0(\beta_n) \\ -J_1(\beta_n) - N_1(\beta_n) I_1(\beta_n) - K_1(\beta_n) \\ -J_0(\alpha_n) - N_0(\alpha_n) I_0(\alpha_n) K_0(\alpha_n) \\ J_1(\alpha_n) N_1(\alpha_n) I_1(\alpha_n) - K_1(\alpha_n) \end{vmatrix} + \\ + 2 \frac{1-\nu}{\alpha_n} \begin{vmatrix} J_0(\beta_n) N_0(\beta_n) I_0(\beta_n) K_0(\beta_n) \\ -J_1(\beta_n) - N_1(\beta_n) I_1(\beta_n) - K_1(\beta_n) \\ 0 \quad 0 - I_1(\alpha_n) K_1(\alpha_n) \\ J_1(\alpha_n) N_1(\alpha_n) \quad 0 \quad 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

где $J_i(z)$; $N_i(z)$; $I_i(z)$; $K_i(z)$, ($i = 0, 1$) — цилиндрические функции;

$$\alpha_n = c \sqrt{\frac{p_n}{a}}; \beta_n = \gamma \alpha_n; \gamma = \frac{b}{c}.$$

Функции $K_0(z)$, $N_0(z)$ имеют логарифмическую особенность в точке $z = 0$. Поэтому при $\gamma = 0$ постоянные $A_i^{(n)}$ должны выбираться так, чтобы решение (4) оставалось конечным при $z = 0$, т. е.

$$A_2^n - \frac{\pi}{2} A_4^n = 0;$$

$$A_1^n + A_3^n = 0.$$

Как легко проверить, при таком выборе постоянных граничные условия (3) выполняются. Таким образом, в случае $\gamma = 0$ первые две строки в определителях уравнения (5) будут

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (5) решалось численно на ЭВМ. Значения $\alpha_n(\gamma, \nu)$ первых четырех корней для некоторых γ и ν приведены в таблице.

Таблица корней уравнения (5)

ν	$\gamma=0$	$\gamma=0,1$	$\gamma=0,2$	$\gamma=0,3$	$\gamma=0,4$	$\gamma=0,5$
0,25	2,06523	2,10706	2,20090	2,34370	2,55541	2,90907
	4,69037	4,83292	5,19887	5,97795	7,78277	9,35543
	7,86308	8,20796	9,24691	11,19137	13,06905	15,69297
	11,00251	11,60858	13,71212	15,68531	18,30963	21,97929
0,29	2,06460	2,10605	2,19924	2,34139	2,55254	2,90561
	4,69436	4,83696	5,20289	5,98304	7,78539	9,35766
	7,86444	8,20930	9,24858	11,19236	13,06991	15,69369
	11,00323	11,60930	13,71272	15,68583	18,31009	21,97968
0,33	2,06378	2,10486	2,19742	2,33893	2,54949	2,90190
	4,69806	4,84069	5,20662	5,98780	7,78782	9,35975
	7,86570	8,21055	9,25014	11,19329	13,07071	15,69437
	11,00391	11,60997	13,71327	15,68632	18,31051	21,98003

При фиксированном n корни $\alpha_n(\gamma, \nu)$ очень слабо зависят от ν в диапазоне изменения этой величины для стали $\left(\frac{1}{4} \leq \nu \leq \frac{1}{3}\right)$. С увеличением γ корни $\alpha_n(\gamma, \nu)$ растут, при этом рост корней усиливается с увеличением номера n , т. е. частоты более высоких тонов с увеличением γ растут быстрее, чем низких.

После нахождения корней $\alpha_n(\gamma, \nu)$ получим значения частот p_n зонтичных колебаний

$$p_n = \frac{\alpha_n^2(\gamma, \nu)}{c^2} a = \frac{\alpha_n^2(\gamma, \nu)}{c^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}. \quad (6)$$

Частоте основного тона соответствует $n = 1$.

Сравнение полученных цифровых данных с результатами Р Саусвелла при $\nu = 0,3$ [3] показало их хорошее совпадение. Заметим, что в работе [3] приведены результаты вычислений в рассматриваемом нами диапазоне изменения γ лишь для двух значений этой величины.

Для установления приближенной аналитической зависимости частоты основного тона от γ воспользуемся энергетическим методом Рэлея, согласно которому надо приравнять друг другу наибольшие значения кинетической и потенциальной энергий колеблющейся пластины [4, 5].

В соответствии с этим методом для основного тона колебаний имеем

$$\alpha_1^4 = p_1^2 \frac{\rho h c^4}{D} = \frac{\int_{\gamma}^1 \left[\left(\frac{d^2 v}{d\zeta^2} \right) + \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 \right] \zeta d\zeta + \nu \left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 \Big|_{\zeta=1}}{\int_{\gamma}^1 v^2 \zeta d\zeta}, \quad (7)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \zeta = \frac{r}{c}.$$

Примем

$$v = (\zeta - \gamma)^2 + a(\zeta - \gamma)^3 + b(\zeta - \gamma)^4. \quad (8)$$

При этом граничные условия (3) на внутреннем контуре, при $\zeta = \gamma$, будут удовлетворены. Постоянные a и b следует выбрать так, чтобы были удовлетворены и граничные условия (2).

Подставив (8) в (7) и разложив квадратный корень из правой части формулы (7) по степеням γ , получим, с точностью до членов γ^2 , следующее выражение для α_1^2 :

$$\alpha_1^2 = C_0 + C_1 \gamma + C_2 \gamma^2 + C_3 \gamma^2 \ln \gamma, \quad (9)$$

где постоянные C_0, C_1, C_2, C_3 зависят только от ν . Заметим, что в выражениях для $K_0(z)$ и $N_0(z)$ также имеются члены, содержащие $\gamma^2 \ln \gamma$.

Для коэффициентов C_i ($i = 0, 1, 2, 3$) получаются громоздкие, не удобные для расчетов формулы.

Выше отмечалось, что величина α_1 очень слабо зависит от ν , по крайней мере, в диапазоне $\frac{1}{4} \leq \nu \leq \frac{1}{3}$. Поэтому можно считать ν постоянным и равным для определенности $\frac{1}{4}$.

Если в равенстве (9) положить $C_0 = 4,265$; $C_1 = 1,682$; $C_2 = 16,08$; $C_3 = 6,689$, то получаем хорошее согласование результатов вычисления по формуле (9) с численным решением уравнения (5) в интервале $0 \leq \gamma \leq 0,5$. Наибольшая погрешность (менее 5%) при $\gamma = 0,5$; при $0 \leq \gamma \leq 0,4$ погрешность меньше 1%. Поэтому для частоты основного тона изгибных зонтичных колебаний кругового кольца можно предложить следующее выражение:

$$p_1 = \frac{\alpha_1^2}{c^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \alpha_1^2 = 4,265 + 1,682\gamma + 16,08\gamma^2 + 6,689\gamma^2 \ln \gamma, \quad \nu = \frac{b}{c}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А. Математическая теория упругости, ОНТИ НКТП СССР, 1935.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний, Наука, 1968.
3. Southwell R. V. Proc. Roy. Soc. 1922. A, t. 101.
4. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний, Машиностроение, 1967.
5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Наука, 1967.